MAGYARÁZAT
A MATEMATIKA NULLADIK ZÁRTHELYI
MINTAFELADATSOR FELADATAIHOZ
2010.

1. Tetszőleges, nem negatív a $(a \neq 1)$ szám esetén, $\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} =$

Válasz: **(B)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{a}-a}{1-a}}$

Megoldás: Gyöktelenítsük a nevezőt:

$$\frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \cdot 1 = \frac{\sqrt{a}}{1+\sqrt{a}} \cdot \frac{1-\sqrt{a}}{1-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}-a}{1^2-\left(\sqrt{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{a}-a}{1-a}$$

....

2. Mennyi a $\sqrt{10^{4-\lg 25}}$ kifejezés értéke?

Válasz: **(D) 20**

Megoldás:

$$\sqrt{10^{4-\lg 25}} = \sqrt{\frac{10^4}{10^{\lg 25}}} = \sqrt{\frac{10000}{25}} = \sqrt{400} = 20.$$

Felhasznált azonosságok: 1. $a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}$

2. $a^{\log_a b} = b$

....

3. Melyik síknegyedben lehet a P pont, ha az $\overrightarrow{OP}$ helyvektor α irányszögére igaz, hogy $\sin \alpha > 0$ és $\operatorname{tg} \alpha < 0$?

Válasz: **(C)** csak a II-ban

Megoldás:

- ◊ A $\sin \alpha > 0$ feltétel teljesül, ha $0 < \alpha < \pi$, azaz az I. és a II. síknegyedben.
- ◊ A második, $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} < 0$ feltétel teljesül, ha $\sin \alpha$ és $\cos \alpha$ előjele különbözik, azaz a II. és a IV. síknegyedben.
- ◊ A két feltétel egyszerre a II. síknegyedben teljesül. A megoldás a **C**.

....

4. Az alábbi állítások közül melyik igaz?
Tetszőleges pozitív a, b és c $(a \neq 1)$ számokra teljesül, hogy

(1) $a^b - a^c = a^{b-c}$

(2) $a^b \cdot a^b = a^{(b^2)}$

(3) $\log_a(b+c) = \log_a b + \log_a c$

Válasz: **(D)** egyik sem igaz

Megoldás:

◊ Az első nem igaz. Az azonosság helyesen:
$$a^{b-c}=\frac{a^b}{a^c}\neq a^b-a^c$$
◊ A második nem igaz. Az azonosság helyesen:
$$a^b\cdot a^b=a^{b+b}=a^{2b}\neq a^{(b^2)}$$
◊ A harmadik nem igaz. Az azonosság helyesen:
$$\log_a b+\log_a c=\log_a bc\neq\log_a(b+c)$$

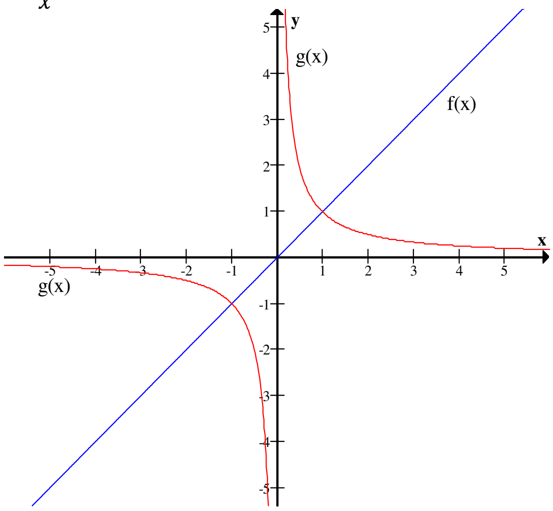
....

5. Mely valós x értékre értelmezhető az $y=\lg\left(x-\frac{1}{x}\right)$ függvény?

Válasz: **(C)** $-1<x<0$ vagy $x>1$

Megoldás:

A logaritmus utáni kifejezésnek nagyobbnak kell lennie, mint 0, azaz, $x-\frac{1}{x}>0$ értékekre lesz értelmezhető a függvény. Eszerint $x-\frac{1}{x}>0\Leftrightarrow x>\frac{1}{x}$. Átfogalmazhatjuk a kérdést így: mely x esetén lesz az $f(x)=x$ függvény grafikonja a $g(x)=\frac{1}{x}$ függvény grafikonja felett? Lássuk a görbéket:



Megoldás: A két görbe a $(-1;-1)$ és az $(1;1)$ pontokban metszi egymást. Amint az ábrából látszik, a megoldás $-1<x<0$ vagy $x>1$ esetén teljesül.

....

6. Mennyivel egyenlő a $\sin 75°\cdot\cos 75°$ szorzat?

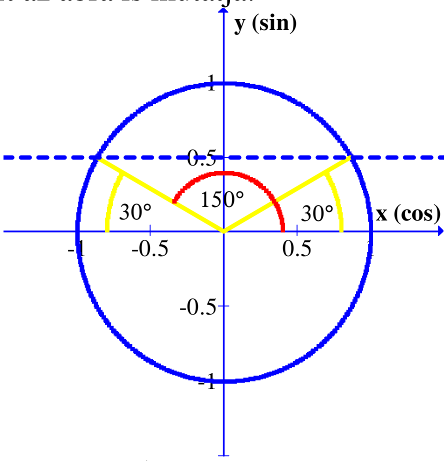
Válasz: **(C)** $\frac{1}{4}$

Megoldás:

Használjuk a $\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$ összefüggést:
$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2}=\frac{\sin 2\alpha}{2}$$
Ezek után

$$\sin 75° \cdot \cos 75° = \frac{\sin 150°}{2}$$

Mint látható, a 150° szinuszát kell megállapítanunk, ami megegyezik a 30° szinuszával, amint azt az ábra is mutatja:



Tehát a keresett érték $\frac{\sin 30°}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$.

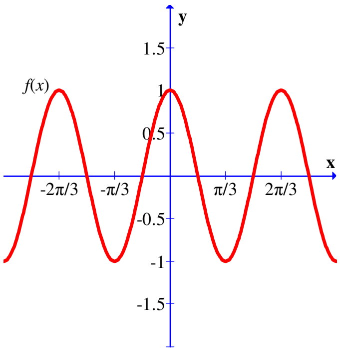
....

7. Az alábbi függvények közül melyik páros függvény?

$f(x) = \cos 3x$ $\qquad g(x) = \frac{10}{x}$ $\qquad h(x) = 2^x$

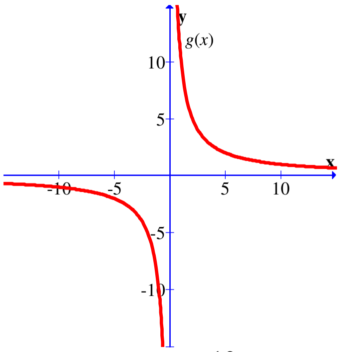
Válasz: **(A)** csak az f

Megoldás: Ábrázoljuk a függvényeket. Amelyik szimmetrikus az y-tengelyre az páros, amelyik, az origóra szimmetrikus az páratlan:



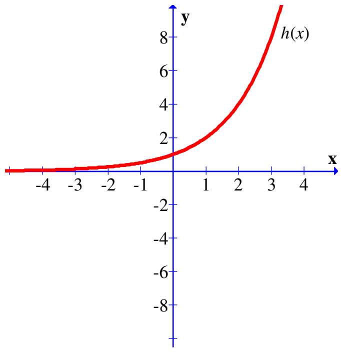
$f(x) = \cos 3x$

páros



$g(x) = \frac{10}{x}$

páratlan

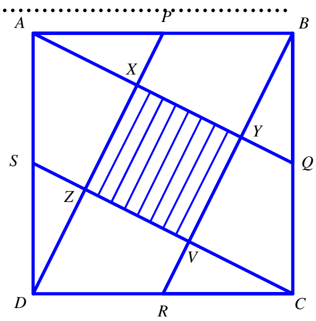


$h(x) = 2^x$

nem páros, nem páratlan

....

8. Mekkora a satírozott rész területe, ha P, Q, R, S pontok egy egységoldalú négyzet oldalfelező pontjai?



Válasz: **(B)** $^1/_5$

Megoldás: (ELSŐ)

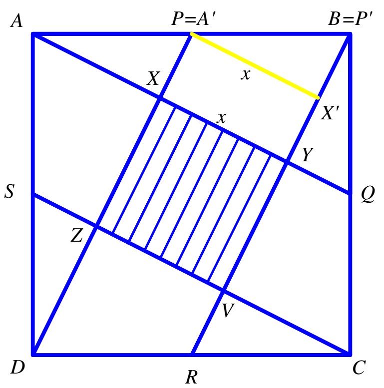
◊ Húzzuk be a $A'X'$ szakaszt és jelöljük x-szel a satírozott négyzet oldalát (ld. lenti ábra).

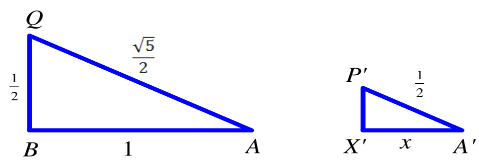
◊ Az ABQ és az $A'X'P'$ háromszögek hasonlóak.

◊ Az AQ szakasz a Pitagorasz-tételből adódóan: $AQ = \sqrt{1+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

◊ Így a hasonlósági arányok felhasználásával: $\frac{x}{BA} = \frac{x}{1} = x = \frac{A'P'}{AQ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

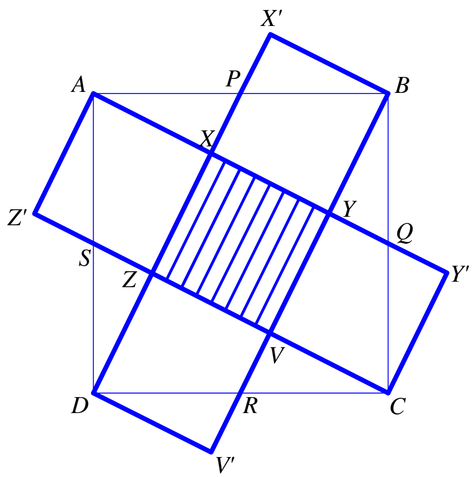
Végül a satírozott négyzet területe: $T = x^2 = \frac{1}{5}$





Megoldás: (MÁSODIK)

Daraboljuk át az $ABCD$ négyzetet a következő ábrán látható módon. Az ábrából látszik, hogy az eredeti négyzet egységnyi területe megegyezik az öt egybevágó kisebb négyzet területének összegével.



9. Egy autó a 92 km-es út első felét 100 km/h sebességgel, a második felét 60 km/h sebességgel tette meg. Mekkora volt az egész útra vonatkozó átlagsebessége?

Válasz: **(A)** 75 km/h

Megoldás:

◊ Az út első felének megtételéhez szükséges idő:

$$\frac{46\text{ km}}{100\text{ km/h}}=\frac{46}{100}\text{h}=\frac{23}{50}\text{h}$$

◊ Az út második felének megtételéhez szükséges idő:

$$\frac{46\text{ km}}{60\text{ km/h}}=\frac{46}{60}\text{h}=\frac{23}{30}\text{h}$$

◊ Az egész út megtételéhez szükséges idő:

$$\frac{23}{50}+\frac{23}{30}=\frac{69+115}{150}=\frac{184}{150}=\frac{92}{75}\text{h}$$

◊ Az egész útra vonatkozó átlagsebesség:

$$\frac{92\text{km}}{\frac{92}{75}\text{h}}=75\text{ km/h}$$

....

10. Mennyivel egyenlő az $x^2+\frac{1}{x^2}$ kifejezés értéke, ha $x+\frac{1}{x}=14$?

Válasz: **(B)** 194

Megoldás: Emeljük négyzetre az $x+\frac{1}{x}=14$ egyenlet mindkét oldalát:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}=14^2=196$$

$$x^2+\frac{1}{x^2}=194$$

....

11. Árvízi védekezésre c darab $\frac{p}{q}$ köbméteres tartályt töltöttünk meg homokkal. Hány darab $\frac{m}{n}$ köbméteres tartályba tudtunk volna ugyanennyi homokot beletölteni?

Válasz: **(D)** $\frac{c\cdot p\cdot n}{q\cdot m}$

Megoldás: Jelölje x a szükséges $\frac{m}{n}$ köbméteres tartályok számát.

◊ Írjuk fel az egyenletet:

$$x\cdot\frac{m}{n}=c\cdot\frac{p}{q}$$

◊ Szorozzunk n-nel és osszunk m-mel:

$$x=\frac{c\cdot p\cdot n}{m\cdot q}.$$

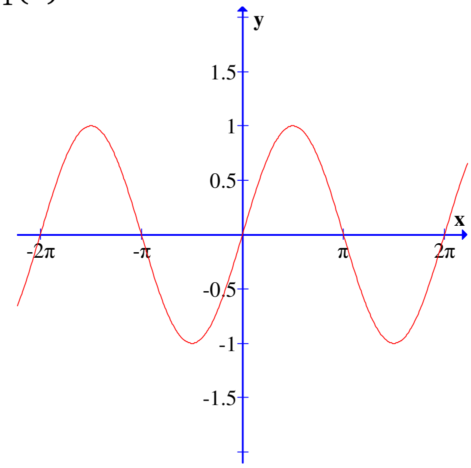
....

12. Az alábbiak közül melyik az $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}-\pi\right)+1$ függvény grafikonja?

Válasz: **(A)**

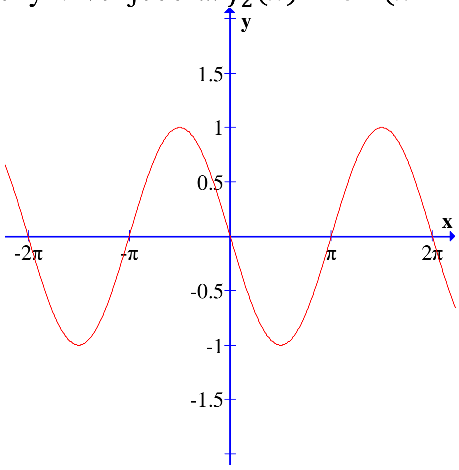
Megoldás: Lássuk lépésenként:

◊ Alapfüggvény: $f_1(x) = \sin x$:



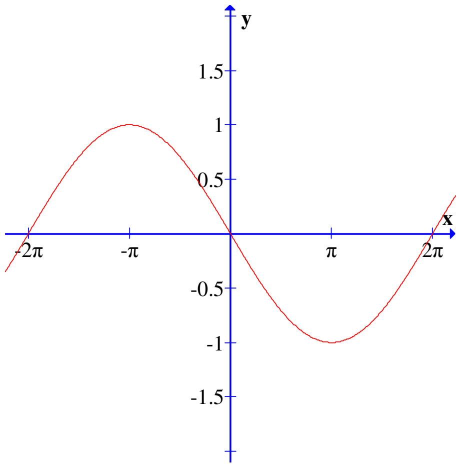
12.1. ábra

◊ Toljuk el a függvény π-vel jobbra: $f_2(x) = \sin(x - \pi)$:



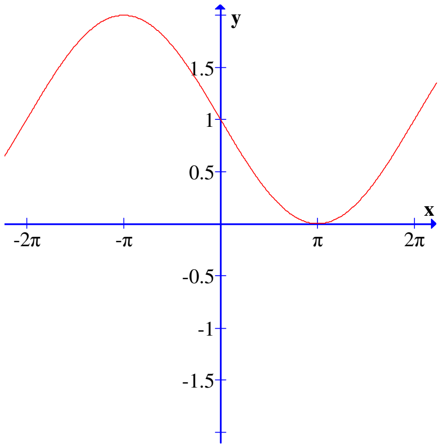
12.2. ábra

◊ Nyújtsuk a függvényt vízszintes irányban a kétszeresére: $f_3(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right)$:



12.3. ábra

◊ Toljuk el a függvényt felfelé 1 egységgel: $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2} - \pi\right) + 1$:



12.4. ábra

◊ Ez a görbe látható az 1. ábrán, a helyes válasz az **(A).**

....

13. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

Az $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 4 = 0$ egyenletű körre teljesül, hogy

1. középpontja a $(-4; 2)$ pont **2.** sugara 4 egység **3.** érinti az y tengelyt

Válasz: **(E)** több állítás is igaz

Megoldás:

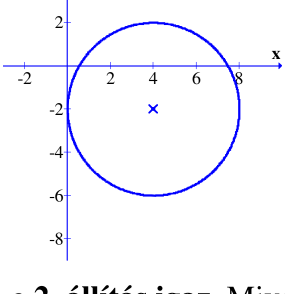
◊ Az általános köregyenlet: $(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$
Az egyenletben az u a kör középpontjának x koordinátája, a v a középpont y koordinátája, végül r a kör sugara.

◊ Alakítsuk át a kör egyenletét a fenti formára (használjuk a teljes négyzetté alakítás módszerét):

$$[x^2 - 8x] + [y^2 + 4y] + 4 = 0$$
$$[(x-4)^2 - 16] + [(y+2)^2 - 4] + 4 = 0$$
$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 16$$

Az egyenletből látszik, hogy a kör középpontja $(4; -2)$ pontban van és sugara 4.

◊ Rajzoljuk fel a kört:



◊ Tehát a **1. állítás hamis**, a **2. állítás igaz**. Mivel a kör középpontja az y tengelytől 4 egységre van és a sugara is 4, ezért érinti az y tengelyt, így a **3. állítás igaz.**

....

14. Írja fel az $A(-5;-2)$ és $B(-2;7)$ pontokat összekötő szakasz felező merőleges egyenesének egyenletét.

Válasz: **(A)** $3y + x = 4$

Megoldás:

◊ Az $\overrightarrow{AB}$ vektor az A és B pontokra illeszkedő egyenesnek az irányvektora, ezért a keresett egyenesnek a normálvektora. Állítsuk elő $\overrightarrow{AB}$-t:
$\overrightarrow{AB} = \vec{n} = \big(-2-(-5);\ 7-(-2)\big) = (3;\ 9)$ egy egyenes normálvektorának többszörösei is normálvektorok, tehát $\vec{n} = (1;3)$.

◊ A normálvektoros egyenlethez kell egy P_0 pont is, ami rajta van az egyenesen. Ilyen pont az A és B szakasz felezési pontja. Állítsuk elő P_0-t:

$$P_0 = \left(\frac{-5+(-2)}{2}; \frac{-2+7}{2}\right) = \left(-\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$

◊ Az általános normálvektoros egyenlet, ha $P_0 = (x_0; y_0)$ és $\vec{n} = (A;B)$:

$$A \cdot x + B \cdot y = A \cdot x_0 + B \cdot y_0$$

◊ Végül írjuk fel a mi egyenletünket:

$$x + 3y = -\frac{7}{2} + \frac{15}{2}$$
$$x + 3y = 4$$

....

15. Egy gép értéke évente 20%-kal csökken. Két év használat után a gépet akkori értékének $\frac{3}{4}$ részéért eladták. Az eredeti ár hány százalékáért jutott az új tulajdonos a géphez?

Válasz: **(B)** 48%

Megoldás:

◊ Jelölje x a gép eredeti árát. Ekkor:

$$\underbrace{\underbrace{x \cdot 0{,}8}_{\text{1. év után}} \cdot 0{,}8}_{\text{2. év után}} \cdot \frac{3}{4} = x \cdot 0{,}64 \cdot \frac{3}{4} = x \cdot \frac{64}{100} \cdot \frac{3}{4} = x \cdot \frac{16 \cdot 3}{100} = x \cdot \frac{48}{100}$$

◊ Azaz az eredeti ár 48%-át fogja érni a gép az eladáskor.

....