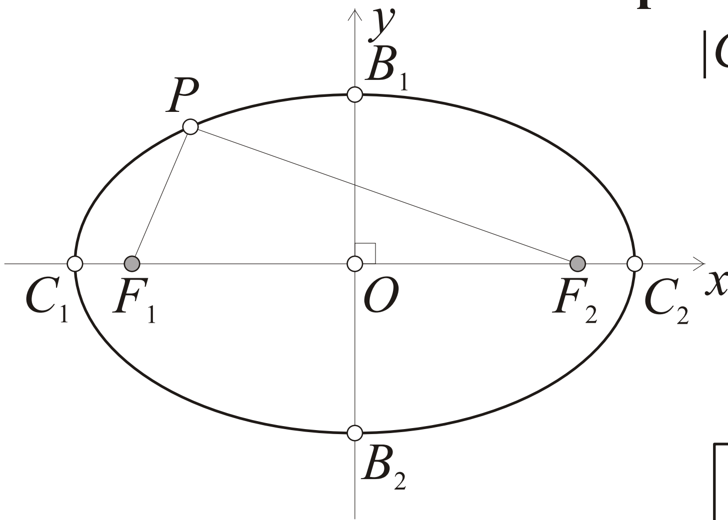
A KÖR AFFIN KÉPE

Az ellipszis egyenlete



$$|C_1C_2| = 2a; \quad |F_1F_2| = 2c; \quad b^2 = a^2 - c^2$$

$$F_1(-c,\ 0); \quad F_2(c,\ 0); \quad P(x,\ y)$$

$$|F_1P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|F_2P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + 2xc + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2xc + c^2) + y^2$$

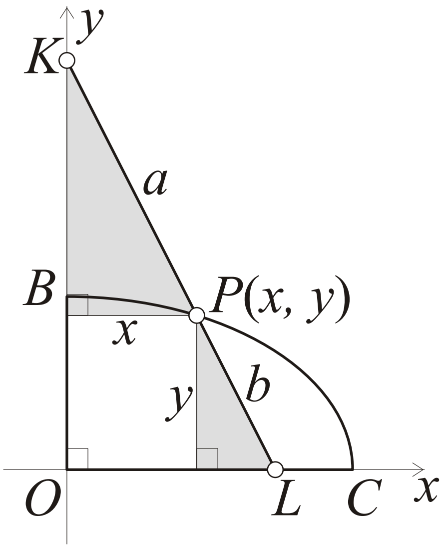
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ illetve } K(u,\ v) \text{ középponttal: } \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1}$$

Az ellipszográf elve, papírcsík szerkesztés



Az $a+b$ hosszúságú KL egyenes szakasz úgy mozog a koordinátarendszerben, hogy mozgása közben K és L végpontjai rendre az x ill. y tengelyen maradnak. Vizsgáljuk, milyen pályán mozog eközben a szakaszt a és b hosszúságú darabokra osztó P pont.

A megjelölt hasonló derékszögű háromszögekből:

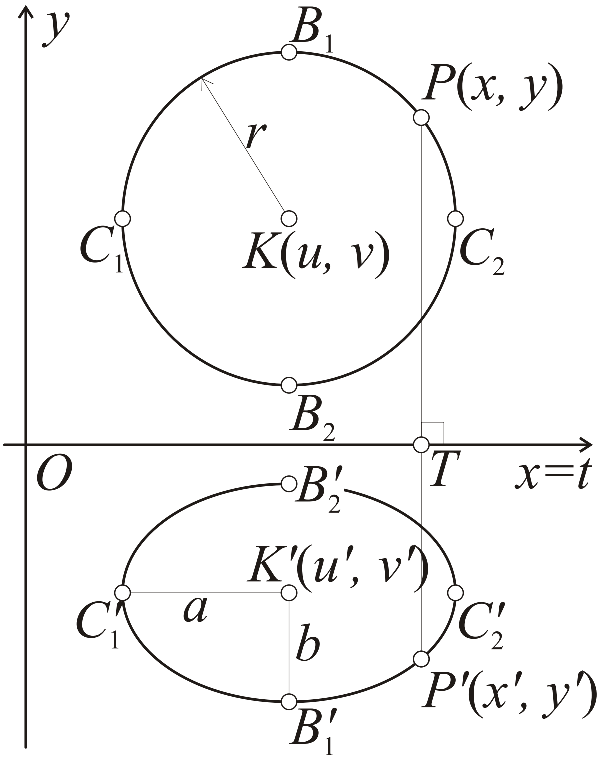
$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}, \text{ majd négyzetre emelve: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Láthatjuk tehát, hogy a P pont egy origó középpontú a, b féltengelyű ellipszis pályán mozog ($a = |OC|$, $b = |OB|$). Ez az ***ellipszográf elve*** (ill. az ún. ***papírcsík szerkesztés***).

Feladat: Adott egy ellipszis C_1C_2 nagytengelye és azon kívül egy P pontja. Állítsuk elő a B_1B_2 kistengelyt.

Megoldás a *papírcsík szerkesztés megfordítása* alapján: B_1B_2 egyenese a C_1C_2 szakasz felező merőlegese. P köré körívet rajzolunk $a = |C_1C_2| / 2$ sugárral. Ez a kör a B_1B_2 egyenesből (P oldalán) kimetszi a K pontot, a KP egyenes pedig C_1C_2-ből az L pontot. A fél kistengely hossza a PL távolság: $b = |B_1B_2| / 2 = PL$. Ezt kell felmérni a középponttól (a tengelyek metszéspontjától) B_1 és B_2 kijelöléséhez.

A kör affin képe ellipszis



Adott a t tengelyű λ arányú merőleges affinitás, és a K középpontú r sugarú ***kör.*** Keressük a kör képét.

Koordinátarendszert rögzítünk a síkon úgy, hogy annak x tengelye egybeessen t-vel. Tekintjük a kör egy P pontját. Ennek koordinátáira az alábbi egyenlet teljesül:

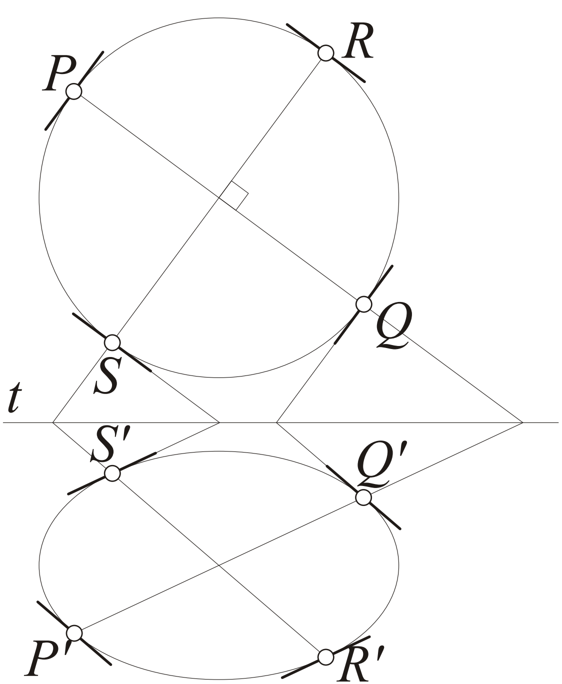
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Az affinitás definíciója szerint $|P'T| = \lambda|PT|$, így P' koordinátai az $x' = x$ és $y' = \lambda y$ kifejezésekkel adódnak. Fordítva, P koordinátái is kifejezhetők P'-éből: $x = x'$, $y = y'/\lambda$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$$(x'-u)^2 + (y'/\lambda - v)^2 = r^2, \text{ amiből az } \frac{(x'-u)^2}{r^2} + \frac{(y'-\lambda v)^2}{(\lambda r)^2} = 1$$

egyenlet adódik. Ez pedig a K' középpontú ($u' = u$, $v' = \lambda v$) ***ellipszis*** egyenlete, amelynek x-szel párhuzamos féltengelye ($|\lambda| < 1$ esetén fél nagytengelye) $a = r$, míg y tengellyel párhuzamos féltengelye (fél kistengelye) $b = |\lambda| r$.

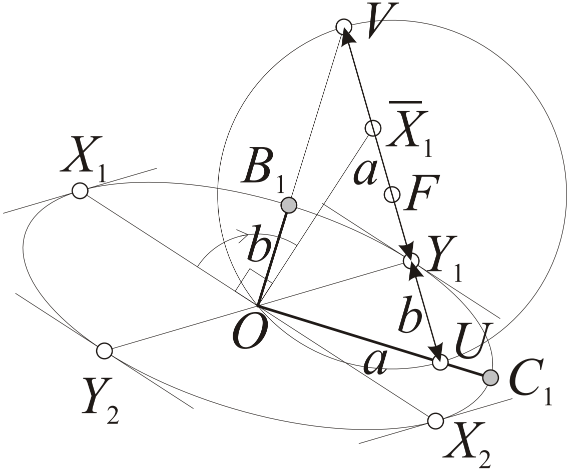
Konjugált átmérőpár



Az ellipszis (spec. a kör) két átmérőjét ***konjugált átmérőpárnak*** nevezzük, ha az egyik átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a másik átmérővel, és a második átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak az első átmérővel.

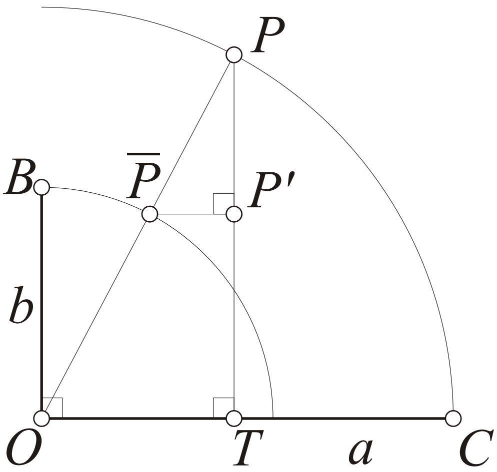
A kör konjugált átmérőpárjai a merőleges átmérőpárok.

A párhuzamosságtartás miatt a kör (vagy egy ellipszis) konjugált átmérőpárjának affin képe a képellipszis egy konjugált átmérőpárja.

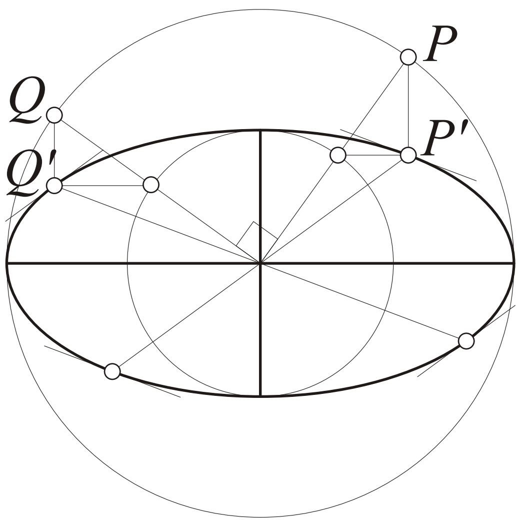


Rytz-szerkesztés. Adott egy ellipszis X_1X_2, Y_1Y_2 konjugált átmérőpárja. Keressük a C_1C_2, B_1B_2 tengelyeit. Az OX_1 átmérőt O körül 90°-kal elforgatva $O\overline{X}_1$ adódik. Az $\overline{X}_1Y_1$ szakasz F felezőpontja körül O-n áthaladó kört rajzolunk, amely az $\overline{X}_1Y_1$ egyenest az U és V pontokban metszi (U az X_1X_2, Y_1Y_2 átmérők hegyesszögű tartományába esik). Ekkor OU a nagytengely egyenese, és $a=|OC_1|=|VY_1|$; a kistengely egyenese pedig OV, és $b = |OB_1| = |UY_1|$.

Kétkörös szerkesztés



Ha adottak az ellipszis tengelyei, megrajzoljuk a ***főkört*** – a nagytengely Thalész-körét (sugara a) – és a ***mellékkört*** – a kistengely Thalész-körét (sugara b). P a főkör egy tetszőleges pontja. Az OP sugár $\overline{P}$-ban metszi a mellékkört. P-ben merőlegest állítunk az OC nagytengelyre, $\overline{P}$-ban pedig az OB kistengelyre. Ekkor e két egyenes P' metszéspontja illeszkedik az ellipszisre.



Ugyanis OT és $\overline{P}P'$ az OPT szög szárainak párhuzamos szelői, így $|P'T| \,/\, |PT| = |\overline{P}O| \,/\, |PO| = b/a = \lambda$ állandó, vagyis P' a P pont OC tengelyre vonatkozó λ arányú affin képe.

A főkör további pontjaiból kiindulva tetszőlegesen sok ellipszispont megszerkeszthető.

Célszerű a főkör egymásra merőleges (konjugált) OP és OQ átmérőpárjaiból kiindulni. Ekkor a kapott átmérők konjugáltságából egyszerűen adódnak az érintők is.