TÉRGEOMETRIAI BEVEZETÉS

1. Térelemek

– pont (0-dimenziós); jelölése: *A, B, C,* …
– egyenes (1-dimenziós); jelölése: *a, b, c,* …
– sík (2-dimenziós); jelölése: α, β, γ, …

2. A sík megadása alacsonyabb dimenziós térelemekkel

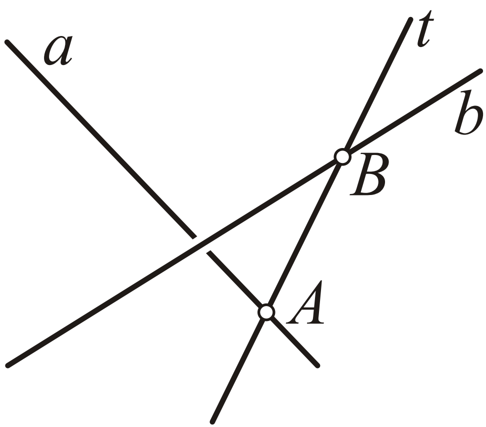
A síkot meghatározza:
– három nem egy egyenesre illeszkedő (nem kollineáris) pont;
– egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont;
– két párhuzamos egyenes;
– két metsző egyenes.

3. Térelem-párok kölcsönös helyzete

a. Két egyenes lehet *párhuzamos, metsző* vagy *kitérő*.

– Egy **párhuzamos** vagy **metsző** egyenespár egy síkot határoz meg: **egysíkúak.**

– **Kitérő** egyenespár esetén nincs olyan sík, amely a két egyenest tartalmazza (torz egyenespár).



a és b kitérő egyenesek, $A \in a$ és $B \in b$ az egyenesek tetszőleges pontjai.

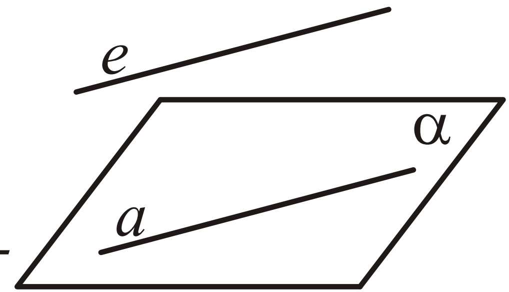
Ekkor a $t = AB$ egyenes metszi a-t és b-t is: t az a és b kitérő egyenesek egy **transzverzálisa.**

Az AB szakaszt **transzverzális szakasznak** is mondjuk.

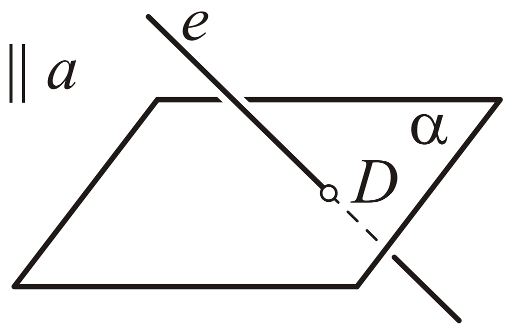
b. Egyenes és sík kölcsönös helyzete.

– *Ha nincs közös pontjuk,* (definíció szerint) *párhuzamosnak mondjuk őket.*

Állítás: *Egy egyenes pontosan akkor párhuzamos egy őt nem tartalmazó síkkal, ha a sík tartalmaz az adott egyenessel párhuzamos egyenest.*



$e \parallel \alpha \;\Leftrightarrow\; e \not\subset \alpha \;\wedge\; \exists\, a \subset \alpha\colon\; e \parallel a$



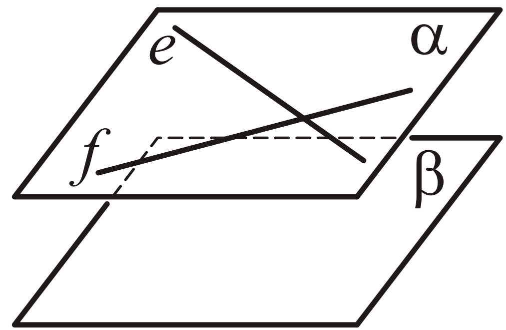
– Ha egyetlen közös pontjuk van, metszik egymást (a metszéspontot *döféspontnak* is mondhatjuk): $D = e \cap \alpha$.

– Ha két közös pontjuk is van, akkor az egyenes minden pontja a síkon van, *az egyenes illeszkedik a síkra:* $e \subset \alpha$.

c. Két sík kölcsönös helyzete.

– *Ha nincs közös pontjuk,* (definíció szerint) *párhuzamosnak mondjuk őket.*

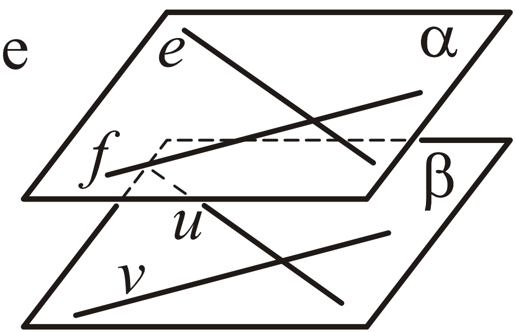
Állítás: *Két sík pontosan akkor párhuzamos, ha az egyikben található két egymást metsző egyenes, amelyek mindketten párhuzamosak a másik síkkal.*



$\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists\, e, f \subset \alpha$ metszők:

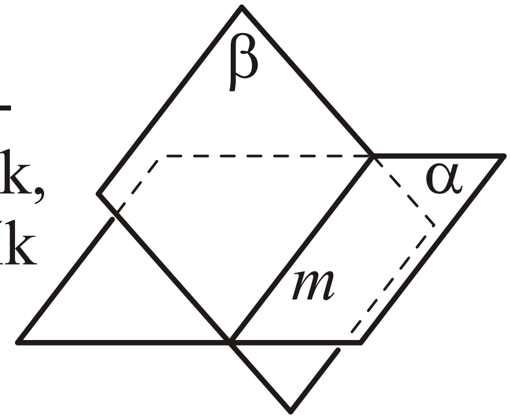
$e \parallel \beta \wedge f \parallel \beta$

Az előző (b) pontot is figyelembe véve: $\alpha \parallel \beta \Leftrightarrow \exists\, e, f \subset \alpha$ $\wedge\ \exists\, u, v \subset \beta$ metsző egyenes-párok: $e \parallel u \wedge f \parallel v$.



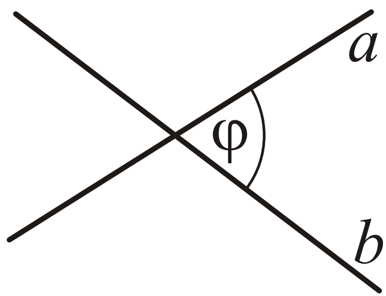
– Ha két (különböző) síknak van egy közös pontja, akkor végtelen sok közös pontjuk is létezik, amelyek egy egyenest, a két sík *metszésvonalát* alkotják:

$$m = \alpha \cap \beta.$$



4. Térelemek hajlásszöge

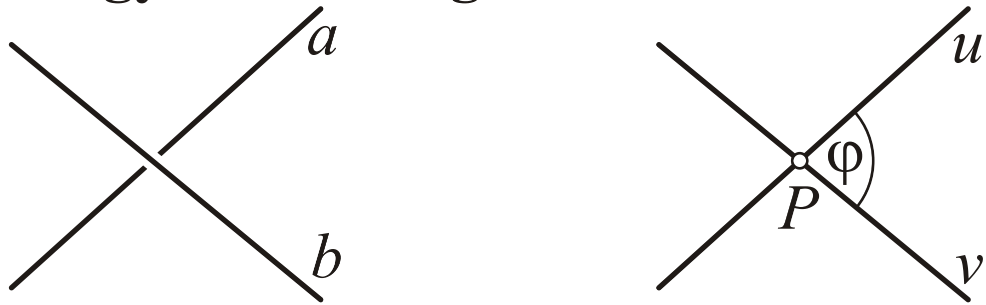
a. Metsző egyenesek szöge. A két egyenes az általuk meghatározott síkot négy szögtartományra osztja, amelyek közül az egymással szemköztiek (a csúcsszögek egyenlősége miatt) egybevágók.



Ekkor a két egyenes szögét a kisebbik (90°-nál nem nagyobb) tartomány mértékeként definiáljuk: $(a, b)_{\angle} = \varphi \leq 90°$

Ha két egyenes szöge 90°, akkor az egyeneseket merőlegesnek mondjuk.
A további hajlásszögek értelmezését erre az esetre vezetjük vissza.

b. Kitérő egyenesek szöge.



A tér egy tetszőleges *P* pontján át az *a* és *b* kitérő egyenesekkel párhuzamos *u* és *v* egyeneseket veszünk, és ezen metsző egyenesek szögeként értelmezzük *a* és *b* szögét:

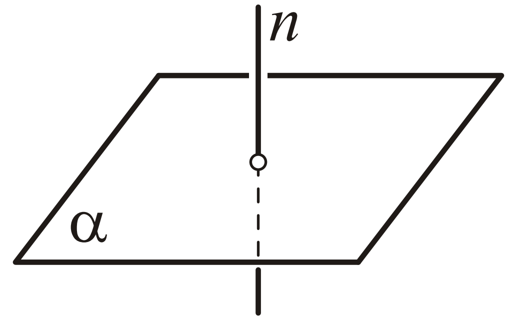
$$P \text{ tetszőleges},\ \ P \in u \parallel a,\ \ P \in v \parallel b,$$

$$(a, b)_\angle = (u, v)_\angle = \varphi.$$

Az egyállású szögek tétele miatt, ez a definíció független *P* megválasztásától.

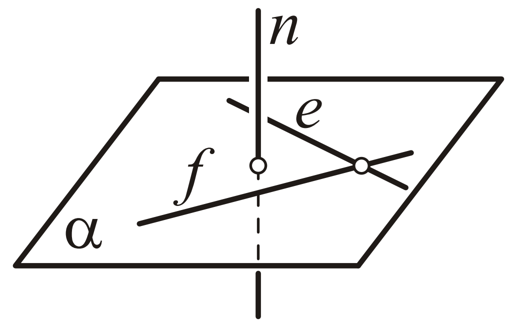
Hasonló megfontolásból a **párhuzamos egyenesek szöge** 0°-nak adódik.

c. Egyenes és sík merőlegessége.



Egy egyenes (definíció szerint) *merőleges egy síkra, ha merőleges annak minden egyenesére.*

Állítás: *Egy egyenes pontosan akkor merőleges egy síkra, ha található a síkban két egymást metsző egyenes, amelyek merőlegesek rá.* $n \perp \alpha \Leftrightarrow \exists\, e, f \subset \alpha$ metszők: $n \perp e \wedge n \perp f$



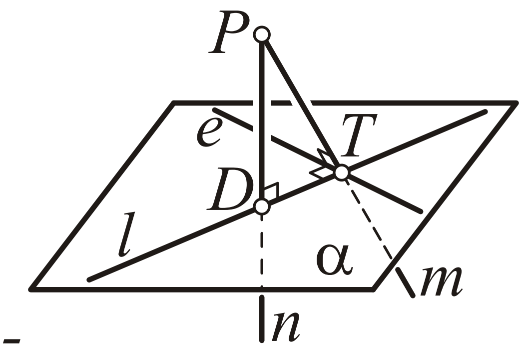
Állítás: *Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor*

a) *a vele párhuzamos egyenesek mindegyike is merőleges rá:* $n \perp \alpha \wedge e \parallel n \Rightarrow e \perp \alpha$;

b) *az egyenes merőleges a síkkal párhuzamos bármely másik síkra is:* $n \perp \alpha \wedge \varepsilon \parallel \alpha \Rightarrow n \perp \varepsilon$.

– Így egy egyenes meghatározza a rá merőleges síkokat (azok állását), és fordítva, egy sík meghatározza a rá merőleges egyeneseket (azok állását).
– Egy adott síkra merőleges egyenest *a sík normálisának* is szokás nevezni.

Állítás (*három merőleges tétele*):

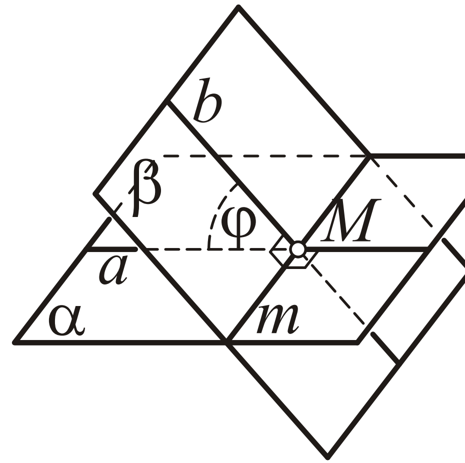


Legyen adott egy sík és a síkban egy egyenes, továbbá (a síkon kívül) egy pont. Tekintsük a pontból a síkra és az egyenesre bocsátott egy-egy merőlegest. Akkor az ezek talppontját összekötő egyenes is merőleges az adott egyenesre:

$e \subset \alpha,\ (P \notin \alpha)\ \wedge\ P \in n \perp \alpha,\ D = n \cap \alpha$

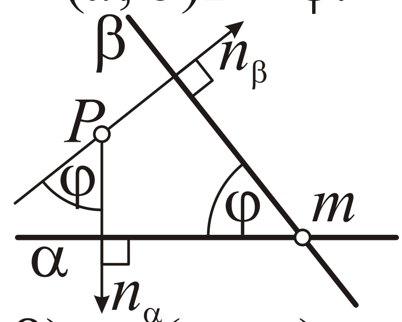
$\wedge\ P \in m \perp e,\ T = m \cap e\ \ (T \in \alpha)\ \Rightarrow\ l = DT \perp e.$

d. Síkok hajlásszöge.



Ha a két sík nem metszi egymást, akkor párhuzamosak, és így a hajlásszögük 0.

Ha a síkok metszik egymást, akkor *a metszésvonalra egy tetszőleges pontján át merőlegest állítunk mindkét síkban, és ezek szögével értelmezzük a síkok hajlásszögét*: $m = \alpha \cap \beta$, $M \in m$; $M \in a \subset \alpha$, $a \perp m$; $M \in b \subset \beta$, $b \perp m$; $(\alpha, \beta)_\angle = (a, b)_\angle = \varphi$.

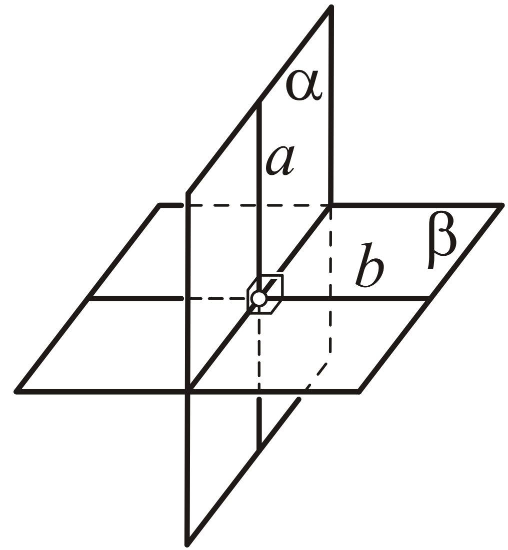


A metszésvonal irányából nézve látható, hogy a síkok normálisainak szöge megegyezik a síkok szögével (merőleges szárú hegyesszögek):

P tetsz; $P \in n_\alpha \perp \alpha$, $P \in n_\beta \perp \beta$; $(\alpha,\beta)_\angle = (n_\alpha, n_\beta)_\angle = \varphi$.

Állítás: *Két sík pontosan akkor merőleges egymásra, ha egyikük tartalmaz a másikra merőleges egyenest.*

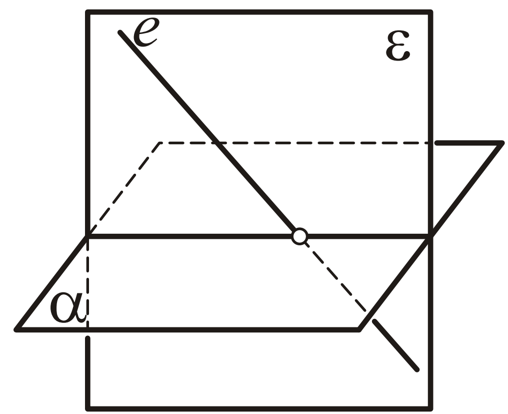
$$\alpha \perp \beta \iff \exists\, a \subset \alpha:\ a \perp \beta$$



Következmény: Ha egy egyenes merőleges egy síkra, akkor az egyenesen átfektetett bármely sík is merőleges rá.

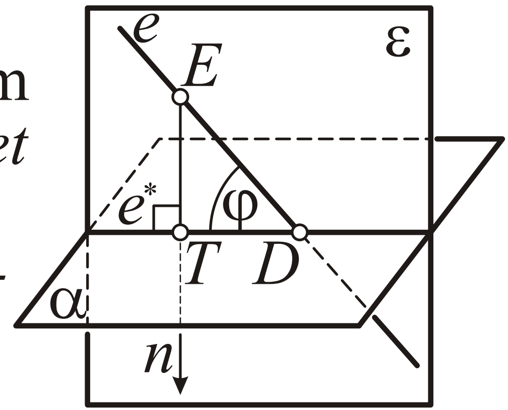
Állítás: *Ha egy egyenes nem merőleges egy adott síkra, akkor az egyenesen át pontosan egy olyan sík fektethető, amely az adott síkra merőleges.*

$$\neg(e \perp \alpha) \Rightarrow \exists!\ \varepsilon:\ e \subset \varepsilon \perp \alpha$$



e. Egyenes és sík hajlásszöge.

Ha az egyenes nem metszi a síkot, akkor párhuzamosak, és így a hajlásszögük 0°, ha pedig merőlegesek egymásra, akkor hajlásszögük 90°.



Ha az egyenes metszi a síkot, és nem merőleges rá, akkor *hajlásszögüket az egyenesnek és a síkra eső merőleges vetületének szögével értelmezzük.*

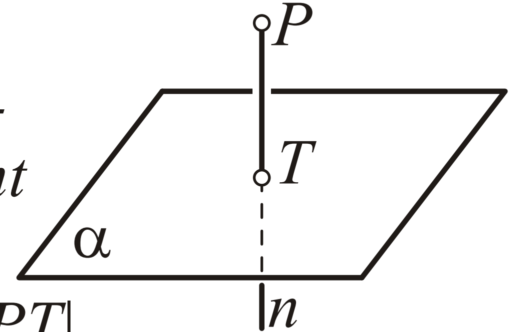
A merőleges vetületet például az egyenes egy pontjából a síkra bocsátott merőleges talppontja és a síkon lévő döféspont határozza meg.

$D = e \cap \alpha$, $E \in e$ $(E \neq D)$ tetszőleges, $E \in n \perp \alpha$,

$T = n \cap \alpha$, $e^* = DT$; $(e, \alpha)_\angle = (e, e^*)_\angle = \varphi$.

Az ábra alapján – az *ETD* derékszögű háromszögből – adódik, hogy *a hajlásszög az egyenes és a sík normálisa által bezárt szög pótszöge:* $\varphi = 90° - (e, n)_\angle$

5. Térelemek távolsága



a. Pont és sík távolsága *a pont és a pontból a síkra bocsátott merőleges talppontjának távolságaként értelmezhető:*

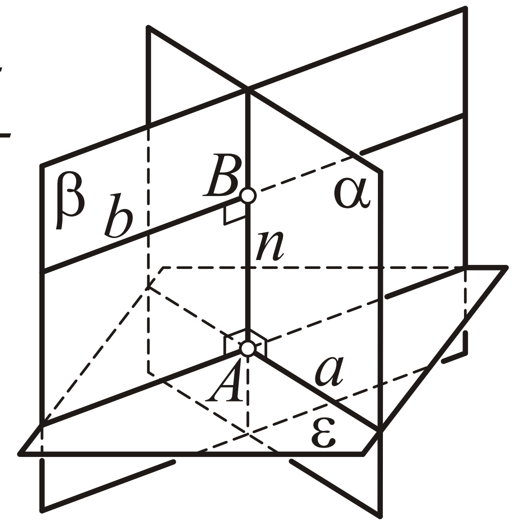
$P \in n \perp \alpha, \;\; T = n \cap \alpha; \;\; |P\alpha| = |PT|.$

b. egyenes és sík távolsága 0, ha van közös pontjuk, egyébként pedig, ha párhuzamosak, az egyenes egy tetszőleges pontjának és a síknak a távolsága lesz, ami független a pont megválasztásától.

c. két sík távolsága 0, ha van közös pontjuk (metszik egymást, vagy egybeesnek), egyébként pedig, ha párhuzamosak, az egyik sík egy tetszőleges pontjának és a másik síknak a távolsága lesz, ami most is független a pont megválasztásától.

d. Kitérő egyenesek távolsága.

Állítás: *Két kitérő egyenesnek egyértelműen létzik olyan transzverzálisa, amelyen a transzverzális szakasz hossza minimális.*



Ez a transzverzális a két egyenes *normáltranszverzálisa*.

Állítás: *A normáltranszverzális mindkét egyenest merőlegesen metszi.*

Az a és b egyenesek normáltranszverzálisának előállításához fölvesszük az a-n átfektetett, b-vel párhuzamos ε síkot. Ekkor az a-n és b-n átfektetett ε-ra merőleges α és β síkok metszésvonalaként kapjuk az n normáltranszverzálist.

A két egyenes távolsága a normáltranszverzális-szakasz hossza: $|ab| = |\varepsilon b| = |AB|$.

6. Térgeometriai szerkesztések

Elvi megállapodások a síkban megszokott szerkesztési lépések térbeli általánosítására:

a. ***Ha adott három, nem egy egyenesre illeszkedő pont, akkor az általuk meghatározott síkot is adottnak tekintjük.*** Tehát 3d-*vonalzónkkal* (elvileg) megrajzolhatjuk a pontokon átfektetett síkot, ahogy síkbeli szerkesztés során két pontot összekötő egyenest megrajzolhatunk egy szokásos vonalzóval.

b. ***Ha adott két metsző sík, akkor metszésvonalukat is ismertnek tekinthetjük.*** Tehát két sík metszésvonalát hasonlóképpen kijelölhetjük, mint ahogyan egy síkbeli szekesztés során két metsző egyenes közös pontját is kijelölhettük.

c. *Ha adott egy sík, akkor abban a (megengedett) síkbeli szerkesztések elvégezhetők.* Ez a megállapodás teremt kapcsolatot az **a** és **b** pontokban leírt lépések és a szokásos síkbeli szerkesztési lépések között.

Így elvi szinten (ábrázolásmódtól függetlenül) gondolhatjuk végig a térgeometriai feladatok megoldását. Az egyes ábrázolási módokban pedig az **a, b** és **c** pontokban leírt lépéseket implementálva, ténylegesen is megoldhatjuk a feladatokat.

A kétképsíkos ábrázolás esetében például az **a** ponttal összhangban adottnak tekintjük a térelemekkel meghatározott síkot. Kidolgozunk egy eljárást két tetszőleges sík metszésvonalának szerkesztésére, ezzel megvalósítva a **b** pontot. Végül egy teszőleges síkot képsíkkal párhuzamos helyzetbe transzformálva (v. leforgatva) a síkbeli szerkesztések is elvégezhetők lesznek **c** szerint.