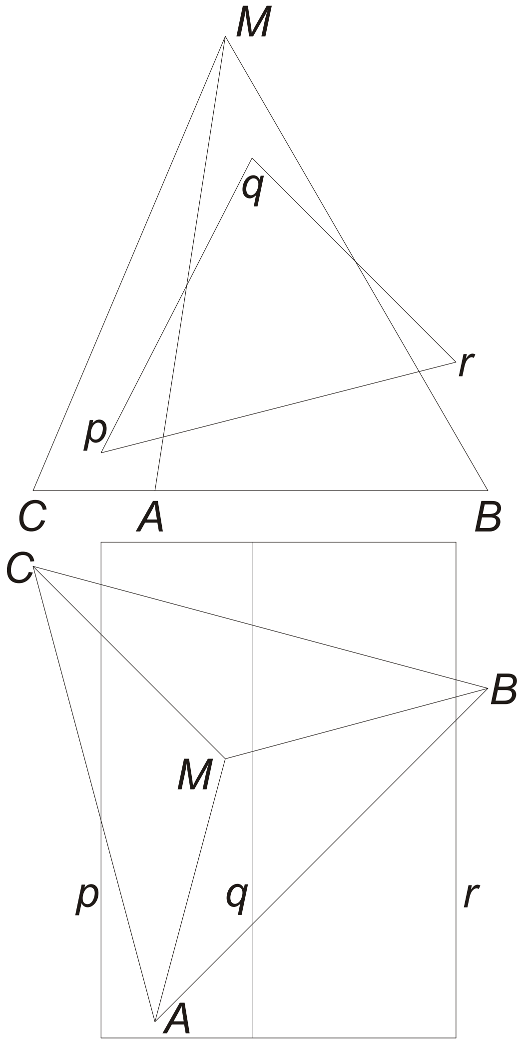
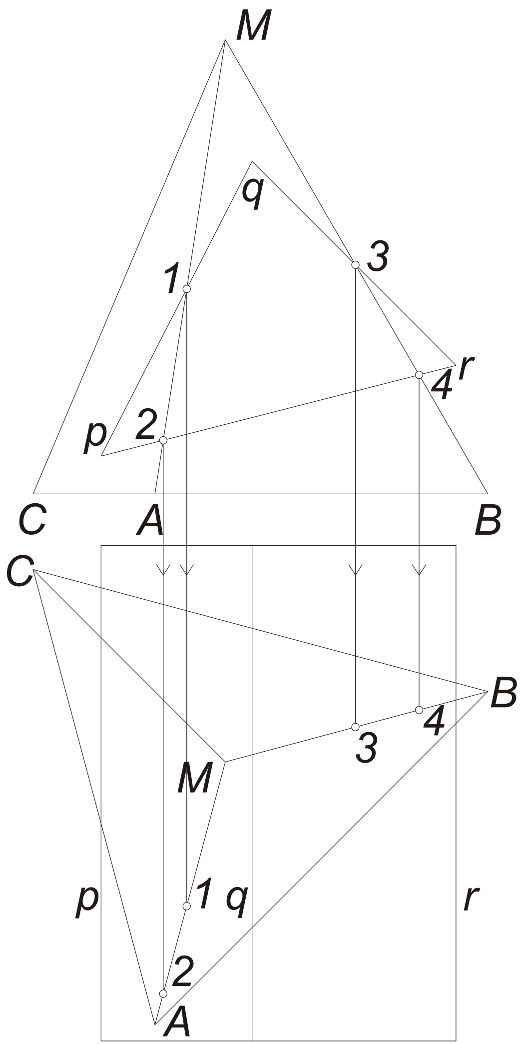
POLIÉDEREK ÁTHATÁSA

Háromoldalú gúla és háromoldalú vetítőhasáb áthatása



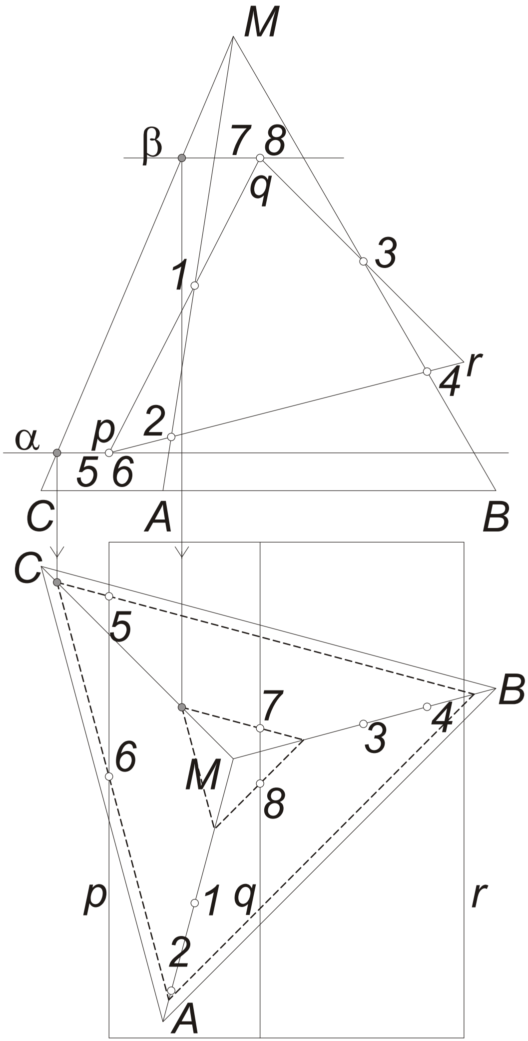
Adott az *ABCM* szabályos háromoldalú gúla, amelynek *ABC* alaplapja I. fősíkra illeszkedik. Adott továbbá egy egyeneshasáb, amelynek oldalélei a *p, q, r* II. vetítőegyenesek. Szerkesszük meg a két síklapú test áthatását.



Keressük a két felület metszetét, az *áthatási poligont*. Először a poligon csúcsait szerkesztjük meg. Csúcsok ott keletkeznek, ahol az egyik test valamelyik éle metszi a másik test valamelyik lapját.

Meg kell tehát szerkeszteni egyrészt, hogy a gúla élei hol metszik a hasáb lapjait, másrészt pedig, hogy a hasáb élei hol metszik a gúla lapjait.

Mivel a hasáb élei II. vetítőegyenesek, ezért az oldallapok II. vetítősíkok. Így közvetlenül leolvashatjuk, hogy ezeket hol metszik a gúla élei. Adódnak tehát az *AM* élen az *1, 2,* a *BM* élen pedig a *3, 4* metszéspontok, amelyeknek I. képét rendezővel állítjuk elő. Láthatjuk, hogy a *CM* oldalél, valamint az alaplap élei nem metszik a hasáb felületét, *nem vesznek részt az áthatásban*.

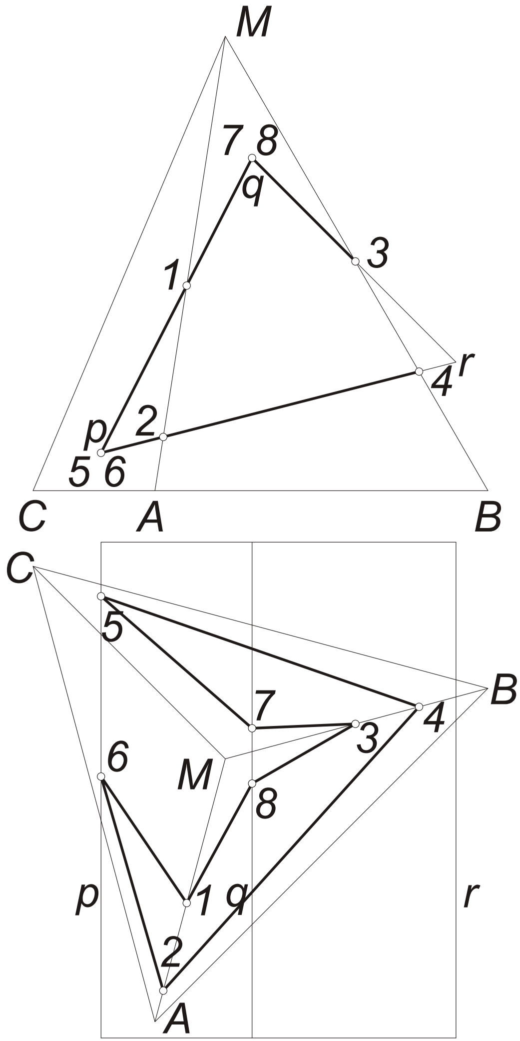


A hasáb *p* és *q* oldaléleinek a gúla lapjaival alkotott metszéspontjait keressük. Láthatjuk, hogy az *r* oldalél, valamint a hasáb két véglapjának élei nem vesznek részt az áthatásban.

A metszéspontok meghatározásához a *p* és *q* éleken át felvesszük rendre az α és β szeletelő síkokat, az *ABC* alaplap síkjával párhuzamosan. Ekkor a két sík által a gúlából kimetszett síkidomok az *M* centrumra nézve középpontosan hasonlóak az *ABC* alaplaphoz, vagyis a metszetek is szabályos háromszögek. Ráadásul, a centrális kapcsolat miatt, a metszetháromszögek élei párhuzamosak az alaplap megfelelő éleivel.

Így elég leolvasni például a szeletelő síkok *CM* oldalélen lévő metszéspontjait. Ezek I. képének megkeresése után az alapélekkel párhuzamosan rajzolva megkapjuk a (szaggatott vonalakkal jelölt) metszetháromszögeket, amelyek kijelölik a *p* és *q* éleknek a gúlalapokkal közös pontjait, az *5, 6* és *7, 8* metszéspontokat.

(A II. képen figyeljük meg, hogy a *2* pont nincs az α síkban, és így annak *2′* képe sem illeszkedik az α által kimetszett háromszögre. Erről az ábra megfelelő fölnagyításával is megbizonyosodhatunk.)

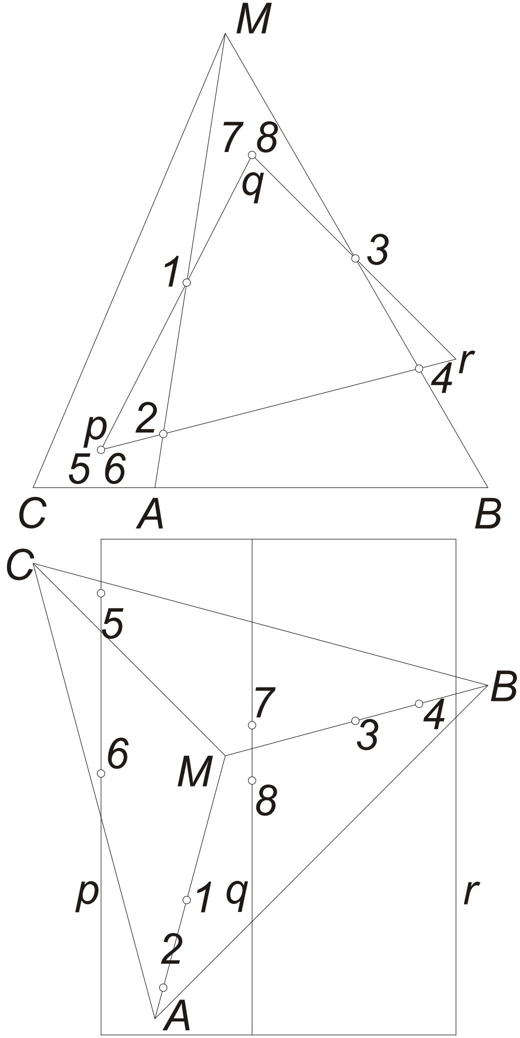


A poligon éleinek meghatározása konvex lapokkal rendelkező (de nem feltétlenül konvex) poliéderek áthatása esetén az alábbi szabály szerint történhet.

Két csúcspont csakis akkor köthető össze egy éllél, ha mindkét testnek van egy-egy olyan lapja, amely mindkét csúcsot tartalmazza.

Így például összeköthetők az *1* és *6* csúcsok, mivel mindketten illeszkednek a gúla *CAM* lapjára (lásd I. kép) és a hasáb *pq* lapjára (lásd II. kép). Hasonló módon összeköthetők a *3* és *7* csúcsok, mert mindketten rajta vannak a gúla *BCM* lapján és a hasáb *qr* lapján. Viszont nem köthetők össze például a *2* és *8* csúcsok, mert bár mindketten illeszkednek a gúla *ABM* lapjára (I. kép), de a hasábnak nincs olyan lapja, amely mindkettőt tartalmazná (ugyanis a II. képen látható, hogy az összekötő szakasz a hasáb belsejében halad).

Ezt az elvet követve kapjuk, hogy a csúcspontok egyetlen élláncot (ciklust) alkotva *1-6-2-4-5-7-3-8-1* sorrendben köthetők össze. Az így kapott térbeli nyolcszög a két test áthatási poligonja.



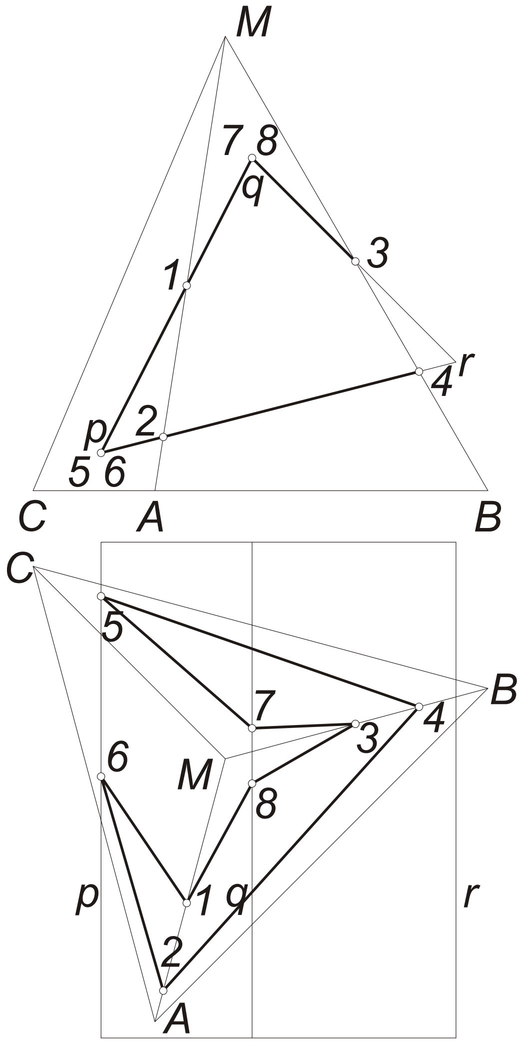
Bonyolultabb esetben az élek megkeresésének érdekében *illeszkedési táblázatot* is készíthetünk, amelyben minden csúcsról leírjuk, hogy az egyes testeknek melyik lapjára illeszkednek.

Például az *1* csúcs rajta van a gúla *AM* élén, és így illeszkedik az él mentén csatlakozó *CAM* és *ABM* lapokhoz (I. kép), másrészt rajta van a hasáb *pq* lapján (II. kép).

Hasonlóan, az *5* csúcs illeszkedik a gúla *BCM* lapjára (I. kép), illetve rajta van a hásáb *p* élén, és így illeszkedik az élben csatlakozó *rp* és *pq* lapokhoz (II. kép).

Ezeket az adatokat a többi csúcs eseténben is meghatározzuk, és táblázatba rendezzük az alábbi módon:

	ABCM	***pqr***
1	*CAM, ABM*	*pq*
2	*CAM, ABM*	*rp*
3	*ABM, BCM*	*qr*
4	*ABM, BCM*	*rp*
5	*BCM*	*rp, pq*
6	*CAM*	*rp, pq*
7	*BCM*	*pq, qr*
8	*ABM*	*pq, qr*



Ha a táblázat helyesen elkészült, akkor annak alapján (az ábrától már függetlenül) az alábbi módon kapjuk a csúcsok összekötésének sorrendjét.

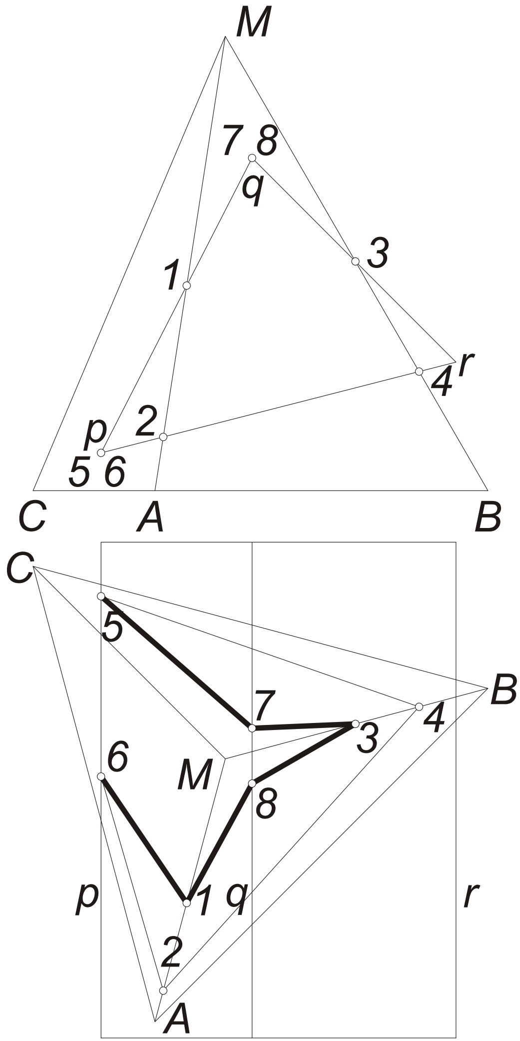
Induljunk ki például az *1* csúcsból. Az *1* csúcs illeszkedik például a gúla *CAM* lapjára és a hasáb *pq* lapjára. A két lap metszésvonalán haladva, keressük melyik csúcsba érkezhetünk. A táblázat szerint a *6* csúcs illeszkedik még ugyanehhez a lappárhoz.

A *6* csúcsban a *CAM, rp* lappár metszsvonalára térhetünk át. A metszésvonal másik végpontja a *2* csúcs. Ide érve az *ABM, rp* lappáron folytathatjuk, amelyek metszésvonala *4*-be vezet, és így tovább.

Végül a *3* csúcsból az *ABM, qr* lappár metszésvonalán a *8* csúcsba jutunk, ahol az *ABM, pq* lappár metszésvonalára áttérve visszaérünk az *1* csúcsba.

Így is eljuthatunk tehát az *1-6-2-4-5-7-3-8-1* élciklushoz.

	ABCM	**pqr**
1	*CAM, ABM*	*pq*
2	*CAM, ABM*	*rp*
3	*ABM, BCM*	*qr*
4	*ABM, BCM*	*rp*
5	*BCM*	*rp, pq*
6	*CAM*	*rp, pq*
7	*BCM*	*pq, qr*
8	*ABM*	*pq, qr*

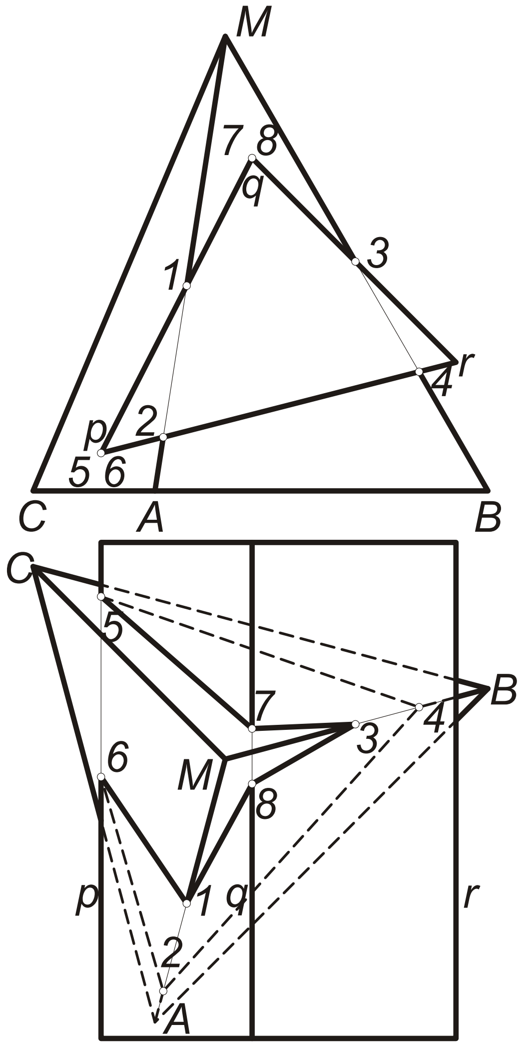


A láthatóság feltüntetésekor az áthatási poligon látható éleit az alábbi szabály szerint kereshetjük meg.

Az áthatási poligonnak egy éle pontosan akkor látható, ha mindkét testnek egy-egy látható lapjára illeszkedik.

Esetünkben a felülnézeti képet kell vizsgálnunk. Felülnézetben a gúla oldallapjai láthatók, az *ABC* alaplapja pedig nem látható. A hasábnak pedig a *pq* és *qr* lapját lehet látni, míg az *rp* lap nem látható.

Mivel az áthatási poligon teljes egészében illeszkedik a gúla oldallapjaira, ezért azok az élek láthatók, amelyek a hasáb *pq* vagy *qr* lapján vannak. Ezek rendre az *57, 73, 38, 81, 16* élek.



A további láthatósági kérdéseket a szokásos módon dönthetjük el. Mindkét testet tömörnek tekintjük, így ha az egyik test valamely élének egy darabja a másik testen belülre esik (esetünkben az *12, 34, 56, 78* éldarabok), akkor ezeket nem létező élként nem húzzuk ki.