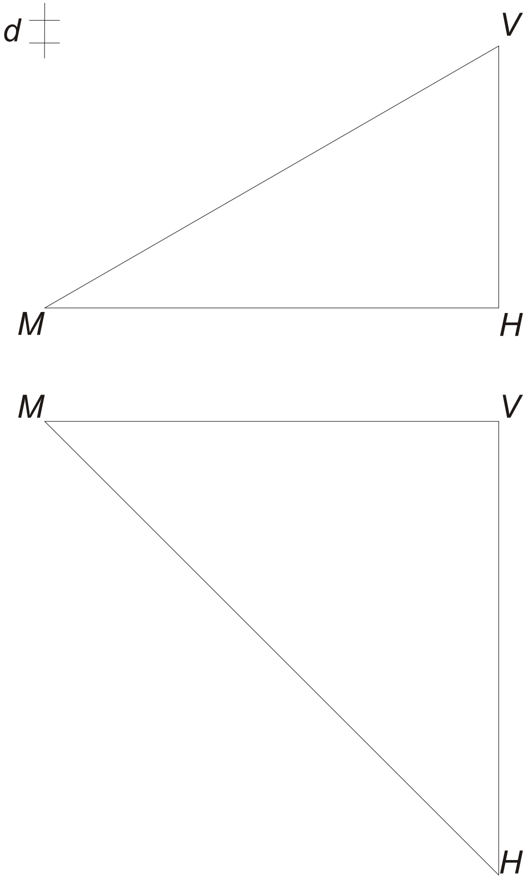
KÖRÁBRÁZOLÁS

Általános síkra illeszkedő kör



Adott az *MHV* háromszög amelynek I. képe egyenlőszárú (*V'*-nél) derékszögű háromszög, és adott a *d* távolság. Ábrázoljuk azt a kört, amely a háromszög mindhárom oldalától *d* távolságra van.

A feladat megoldásához ismernünk kell a kör

a) középpontját,

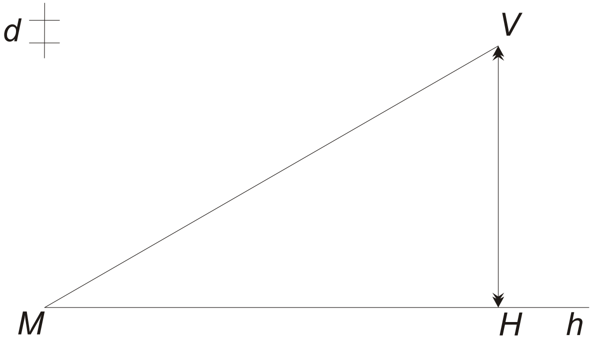
b) sugarát, és

c) síkját.

Ezen adatok közül csak a kör síkját ismerjük közvetlenül, ami azonos a háromszög síkjával. A megoldás első lépése tehát a középpont és a sugár előállítása lesz.

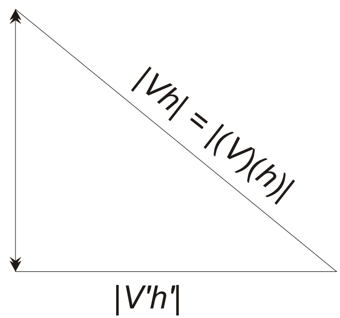
A feltételeknek megfelelő kört úgy származtathatjuk, hogy a háromszögbe írt kört, annak középpontjából alkalmas arányban lekicsinyítjük. Így a keresett kör középpontja egybeesik a beírt kör középpontjával, sugara pedig a beírt kör sugarának és a *d* távolságnak a különbsége.

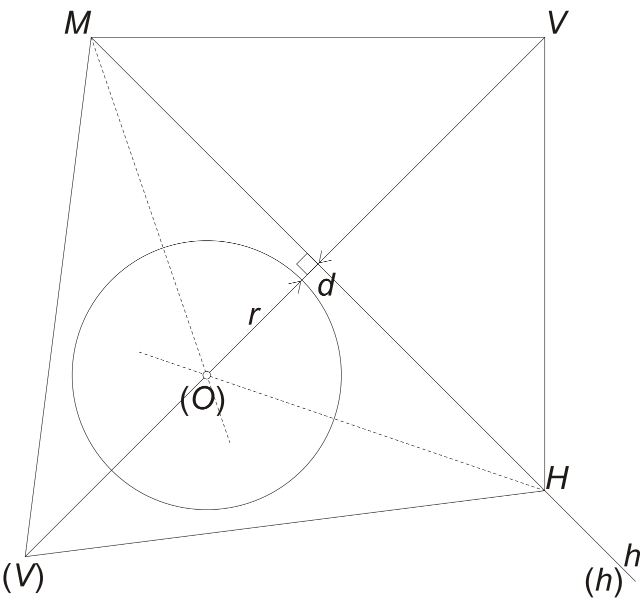
A szerkesztést a háromszög síkjának leforgatásával oldhatjuk meg egyszerűen, ahol a háromszög szögfelezői közvetlenül megrajzolhatók. A kör középpontja azok metszéspontjaként adódik.



A leforgatás tengelyének a sík $h = MH$ I. fővonalát választjuk. Ekkor a forgatás során a *h* tengely pontjai, köztük *M* és *H,* helyben maradnak, a *V* pont pedig egy *h*-ra merőleges síkú köríven mozogva jut leforgatott helyzetébe, a (*V*) pontba, úgy, hogy (*V*) és $h' \equiv (h)$ távolsága megegyezik *V* és *h* valódi távolságával.

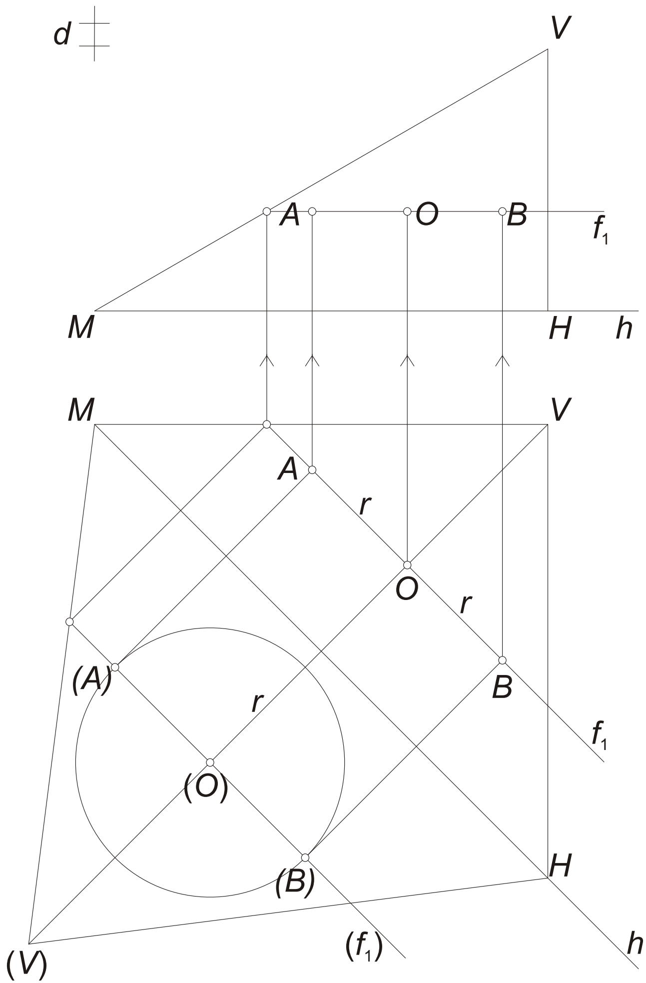
Ez utóbbit a megfelelő különbségi háromszög átfogójaként kapjuk, amelynek vízszintes befogójára az I. képről a $V'h'$ távolságot mérjük, míg függőleges befogójának hossza *V* és *h* II. képről leolvasható magasságkülönbsége lesz.





A leforgatott háromszögben a szögfelezőket megrajzolva jelöljük ki a keresett kör (*O*) középpontját, majd a beírt kör érintési pontjától a *d* távolságot visszamérve megkapjuk a kör egy kerületi pontját, és megrajzolhatjuk a kört.

Mivel esetünkben az *MHV* háromszög I. képe az $M'H'$ átfogójú egyenlő szárú (derékszögű) háromszög, és ráadásul *MH* I. főegyenes, ezért maga az *MHV* háromszög is egyenlőszárú: $MV = HV$. Így a *V* csúcshoz tartozó szögfelező egyben magasságvonal és súlyvonal is.

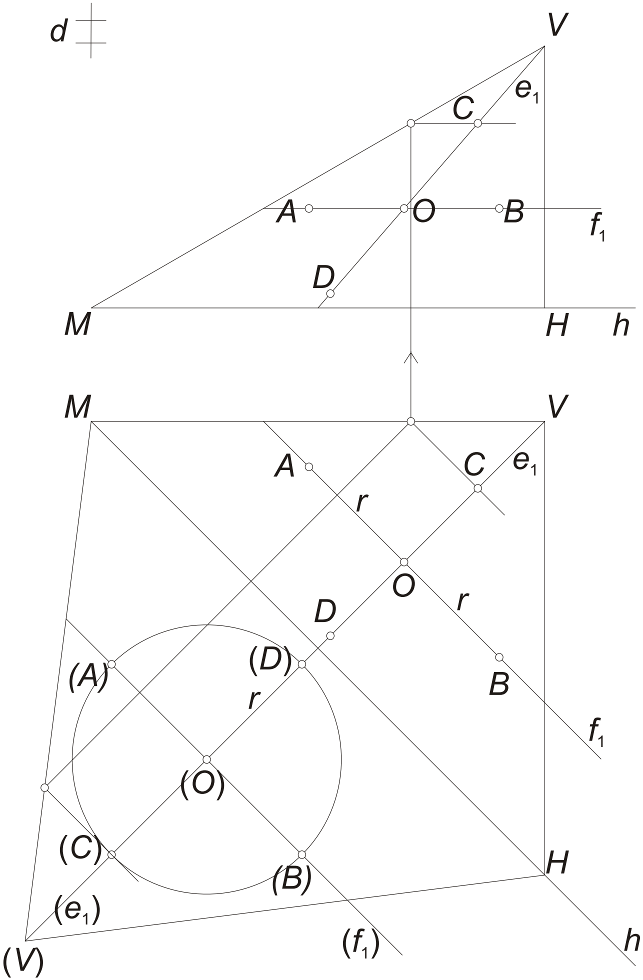


Előállítjuk a képellipszisek tengelyeire képeződő átmérőket.

1.a. Az I. képellipszis nagytengelye az I. fővonalra illeszkedő körátmérő vetülete. Ez az I. képen nem rövidül, hossza megegyezik a kör valódi átmérőjével.

Egy síkon az I. fővonalak egymással párhuzamos egyenesek, a leforgatott síkon így *h*-val párhuzamosan megrajzolhatjuk az *O* ponton áthaladó f_1 fővonalat, amelyre a keresett *AB* átmérő illeszkedik.

Az I. és II kép meghatározásához f_1 és *MV* metszéspontját keressük meg, előbb az I., majd a II. képen. Az így kapott ponton át *h*-val párhuzamosan kapjuk f_1 vetületeit. Ezután az f_1-re illeszkedő *A, B* és *O* pontokat már kijelölhetjük.

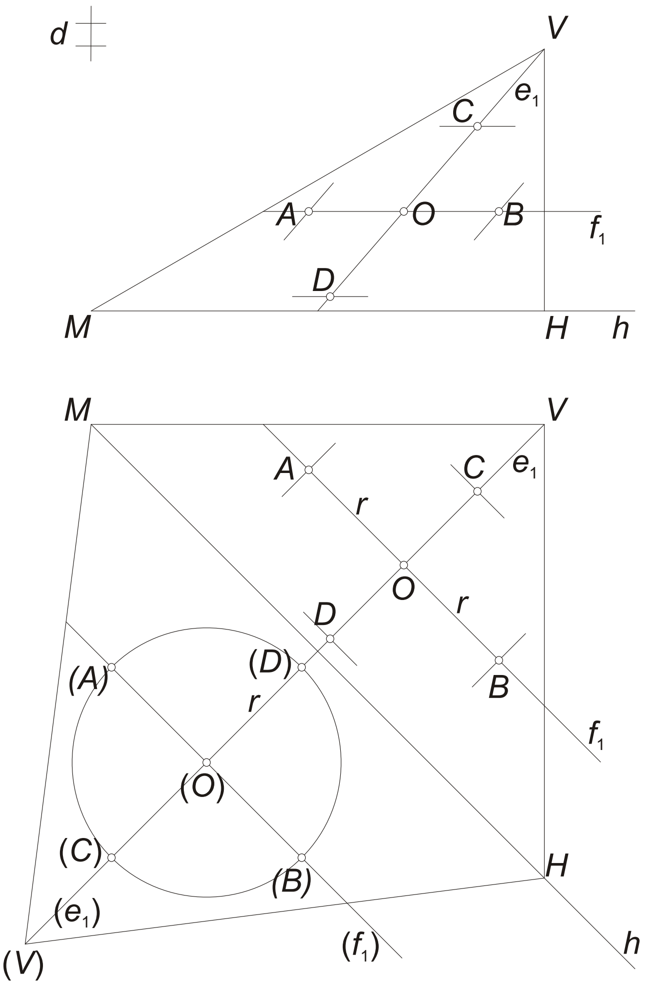


1.b. Az I. képellipszis kistengelye az I. esésvonalra illeszkedő körátmérő vetülete. Ez az átmérő rövidül legnagyobb mértékben, ennek a vetülete a legrövidebb.

Egy sík I. esésvonalai az I. fővonalakra merőleges egyenesek. Esetünkben a középponton áthaladó esésvonal $e_1 = VO$. A leforgatott síkon kijelölhetjük az e_1 egyenesre illeszkedő átmérő *C* és *D* végpontját.

C I. és II. képének meghatározásához tekintsük például a kör *C*-hez tartozó érintőjét, ami *h*-hoz és f_1-hez hasonlóan szintén egy I. fővonal a kör síkjában. Előállítjuk az érintő *MV*-vel közös pontjának I. és II. képét. Ezeken át megrajzoljuk az érintő képét *h* megfelelő vetületével párhuzamosan. Így megkapjuk *C* vetületeit.

D képeit is kereshetjük hasonló módon, de kihasználhatjuk az *O* pontra vonatkozó centrális szimmetriát is, amit a merőleges vetítés megőriz.

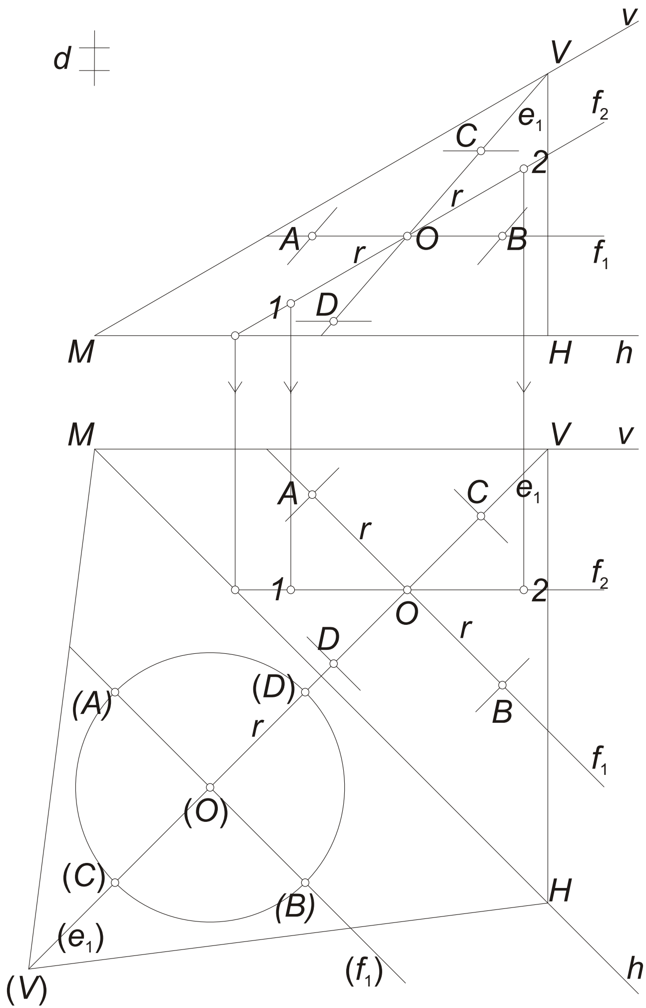


Az érintők megrajzolása annak alapján történhet, hogy *AB* és *CD* a körnek egymásra merőleges átmérői, tehát konjugált átmérőpárt alkotnak. Ez azt jelenti, hogy az egyik átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a másik átmérővel, és fordítva, a második átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak az első átmérővel. Mivel a merőleges vetítés a párhuzamosságot megőrzi, a képellipsziseknek is konjugált átmérőpárját kapjuk.

Így az *A* és *B* pontokhoz tartozó érintőt mindkét vetületben *CD*-vel párhuzamosan kell rajzolnunk, míg a *C* és *D* pontokhoz tartozó érintőnek *AB*-vel kell párhuzamosnak lenni.

Ez természetesen összhangban van azzal, hogy az I. képen a tengelyek végpontjairól van szó, és így az A' és B' pontokhoz tartozó, $C'D'$-vel párhuzamos érintők merőlegesek az $A'B'$ nagytengelyre, illetve a C' és D' pontokhoz tartozó, $A'B'$-vel párhuzamos érintők merőlegesek a $C'D'$ kistengelyre (a nagytengely és a kistengely az ellipszisnek egy speciális konjugált átmérőpárját alkotja).

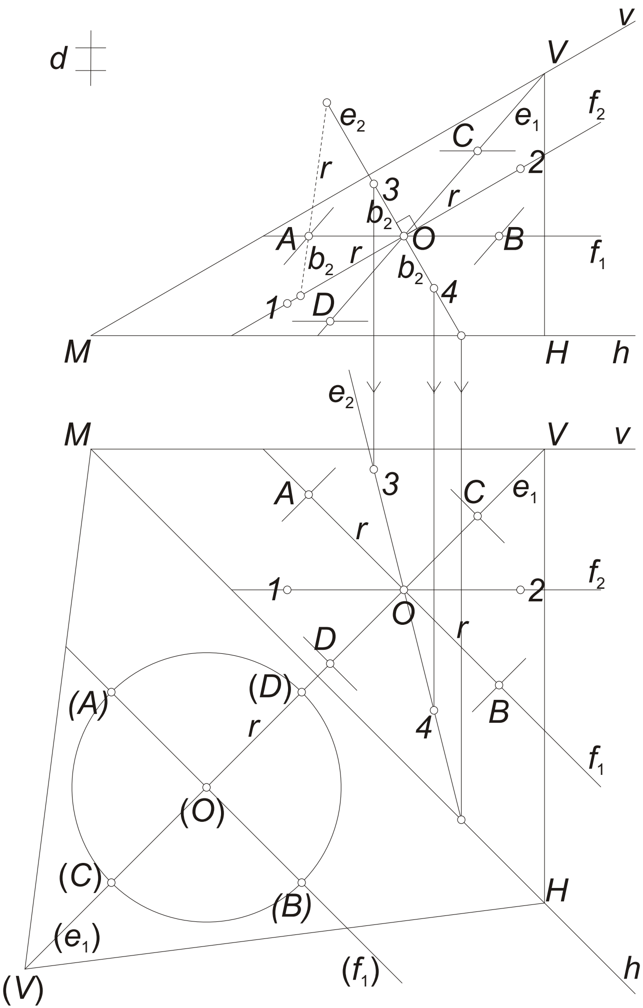
Végül megjegyezzük, hogy az előző lépésben a *C* pont szerkesztésénél már előállítottuk a ponthoz tartozó érintőt, ami természetesen azonos a most elmondott elv alapján adódó érintővel.



2.a. A II. képellipszis nagytengelyére képeződő átmérő illeszkedik a kör síkjának a középponton áthaladó II. fővonalára. A nagytengely hossza megegyezik a kör átmérőjének hosszával.

Fölvesszük tehát az *O* ponton áthaladó f_2 II. fővonalat. Az I. képet rendező irányra merőlegesen (vízszintesen) megrajzolva a *h* egyenessel alkotott metszéspontot tekintjük. Ennek II. képét megkeresve és *O″*-vel összekötve kapjuk a fővonal II. képét. (Azt is észrevehetjük, hogy a háromszög *MV* oldalának *v* egyenese is II. fővonal, így f_2 párhuzamos *v*-vel).

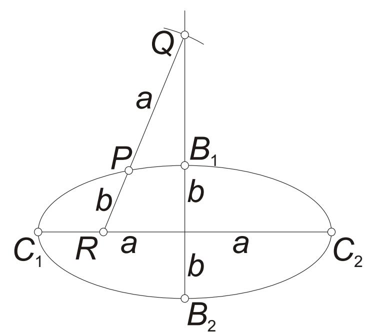
A II. képen az *O″* ponttól a kör sugarának valódi hosszát (az *r* távolságot) felmérve kapjuk az *12* átmérő végpontjainak II. vetületét, az I. képek pedig rendezővel adódnak.



2.b. A II. képellipszis kistengelyére képeződő átmérő illeszkedik a kör síkjának a középponton áthaladó II. esésvonalára. A II. képen ez az átmérő rövidül leginkább a vetítés során.

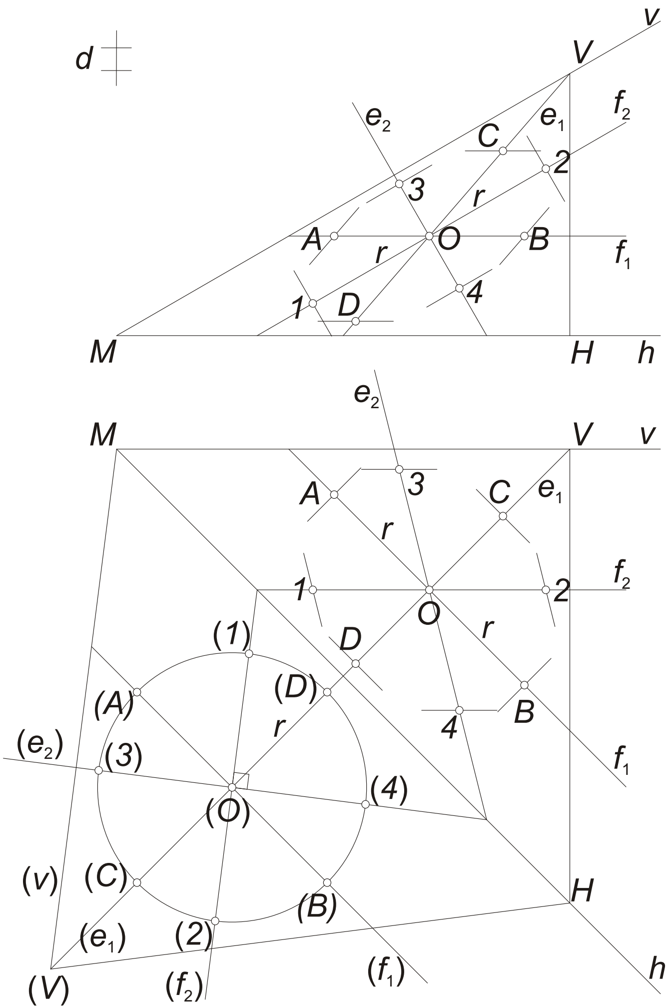
Fölvesszük tehát az *O* ponton áthaladó e_2 II. esésvonalat. Ennek II. képe merőleges az f_2 fővonal képére. Az I. kép előállításához megkeressük például az esésvonal *h*-val közös pontját is.

A II. képellipszis kistengelyének végpontjait közvetlenül (síkbeli szerkesztésként) is megkaphatjuk az úgynevezett *papírcsík*-szerkesztésnek (ill. az *ellipszográf* működési elvének) megfordításából. Ennek értelmében, ha adott egy ellipszis C_1C_2 nagytengelye és egy további *P* pontja, az alábbiak szerint szerkeszthető meg a B_1B_2 kistengelye.



A C_1C_2 szakasz felező merőlegeseként adódik a kistengely egyenese. A *P* köré $a = C_1C_2 / 2$ sugárral (a fél nagytengely hosszával) rajzolt körív a kistengely egyeneséből a saját oldalán egy *Q* pontot metsz ki. A *PQ* egyenes a nagytengely C_1C_2 egyenesét *R*-ben metszi. Ekkor $PR = b = B_1B_2 / 2$ a fél kistengely hossza.

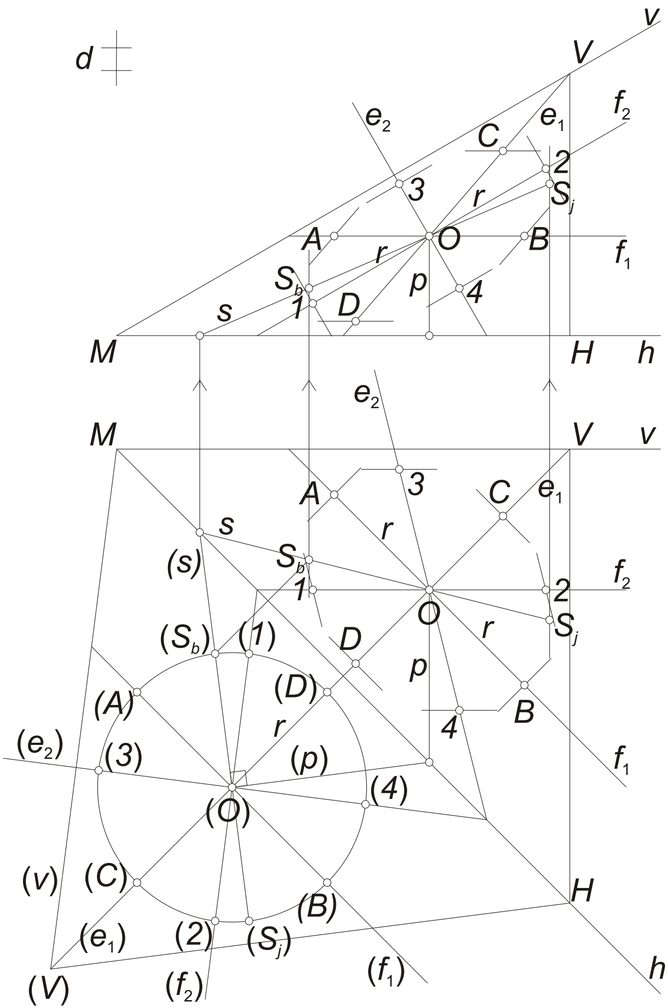
A II. képellipszisnek ismerjük az *1"2"* nagytengelyét és például az *A"* pontját. A fél nagytengely hossza a kör *r* sugarával egyezik meg. A fenti szerkesztést elvégezve megkapjuk a fél kistengely b_2 hosszát, amit e_2"-re mérve adódnak az kistengely *3"* és *4"* végpontjai. Az átmérő végpontok I. képét rendezővel állítjuk elő.



Az *12* és *34* átmérők végpontjaiban is megszerkesztjük az érintőket. Az eljárás most is azon alapulhat, hogy ezek az átmérők az eredeti körben egymásra merőlegesek, tehát konjugált átmérőpárt alkotnak. Így vetületeik a képellipsziseknek szintén konjugált átmérői lesznek. Ennek megfelelően az *1* és *2* pontokban a *34* átmérővel párhuzamosan kell megrajzolni az érintőt, a *3* és *4* pontokban pedig az *12* átmérővel párhuzamosan.

Megjegyezzük, hogy a II. képellipszis tengelyeire képeződő átmérőket is meg lehet kapni a leforgatásban, és annak alapján előbb az I. majd a II. képen is. Ugyanis *M*(*V*)-vel párhuzamosan (f_2) megrajzolható és rájuk merőlegesen e_2 is adódik. A leforgatott kör pedig kijelöli az ezekre illeszkedő *1* és *2*, illetve *3* és *4* átmérő végpontokat.

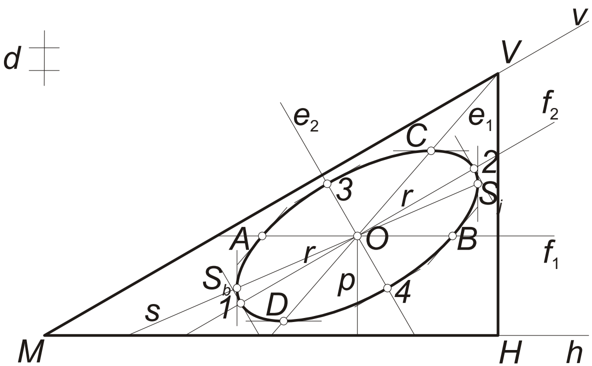
Általában azonban az előbbi, közvetlen módon végrehajtott eljárás pontosabb szerkesztést eredményez.

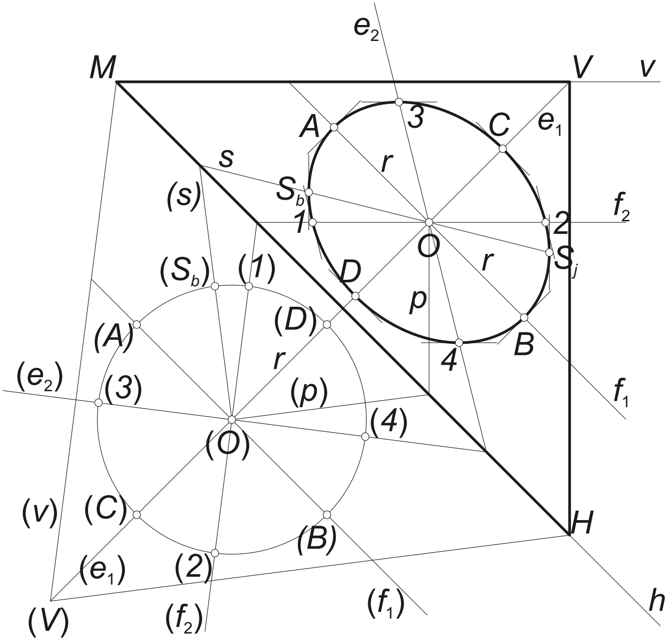


Lényeges átmérőként még a szélső pontokat tartalmazó átmérőt szerkesztjük meg. Ezekben a pontokban az érintők az I. és a II. képen is rendező irányúak (függőlegesek), vagyis a kör síkjának profilegyenesei. A szélső pontokat tartalmazó átmérő tehát a sík profilegyenesére merőleges.

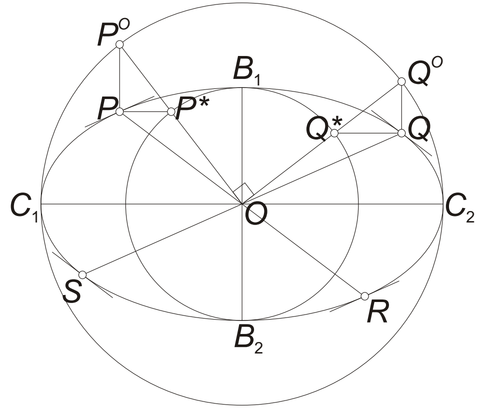
Tekintünk tehát a kör síkjában egy profilegyenest, például az *O* ponton áthaladó *p* egyenest (esetünkben *VH* is alkalmas lenne). Ennek *h*-val alkotott metszéspontja a leforgatás során helyben marad, így azt (*O*)-val összekötve a leforgatott (*p*) egyenest is megkapjuk. A leforgatott síkon erre merőlegesen vehetjük föl a keresett átmérő (*s*) egyenesét. Ezen a leforgatott kör kijelöli például az S_b bal oldali szélső pontot is. Az (*s*) egyenes és *h* közös pontja a visszaforgatásnál helyben marad, ennek alapján *s*′ és *s*″ megrajzolható, és ezeken S_b' illetve S_b'' is adódik. A jobb oldali S_j szélső pontot S_b *O*-ra vonatkozó tükörképeként kapjuk. S_b és S_j rendezője egyben a ponthoz tartozó érintő képe is.

Végül a megszerkesztett pontok és érintők ismeretében megrajzoljuk a vetületi görbéket.





Bizonyos esetekben szükség lehet további pontok és érintők szerkesztésére is. Ez a tengelyek ismeretében például az úgynevezett *kétkörös szerkesztéssel* valósítható meg. Célszerű konjugált átmérőpárokat előállítva négyesével szerkeszteni a pontokat az alábbi módon.



Megrajzoljuk a C_1C_2 nagytengely és a B_1B_2 kistengely, mint átmérő fölé az ellipszis főkörét és mellékkörét. Tetszőlegesen fölveszünk egy P^O pontot a főkörön, és a P^OO-ra merőleges sugár Q^O végpontját is kijelöljük. A P^OO és Q^OO sugarak a mellékkört a P^* illetve a Q^* pontokban metszik. P^O-ban és Q^O-ban a kistengellyel, P^*-ban és Q^*-ban pedig a nagytengellyel párhuzamost rajzolva, azok metszéspontjaként rendre az ellipszis P és Q pontját kapjuk. Ezeket az O középpontra tükrözve az R és S ellipszispontok adódnak. Ekkor PR és QS az ellipszisnek egy konjugált átmérőpárja lesz, így a P és R pontokban QS-sel, a Q és S pontokban pedig PR-rel párhuzamosan rajzolhatók meg az érintők.