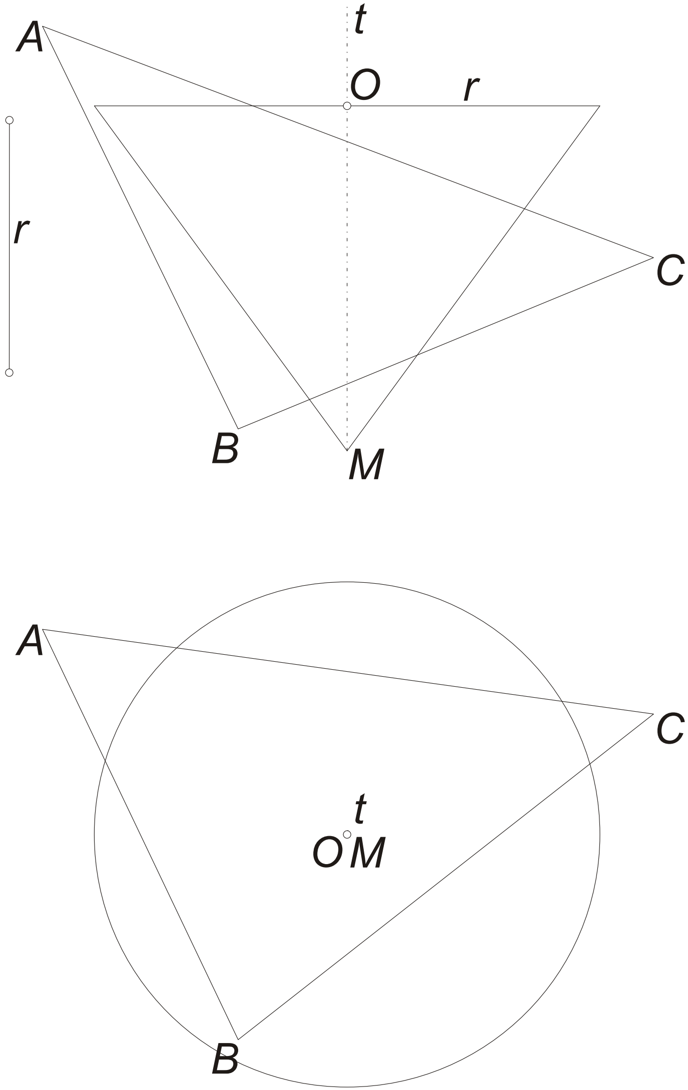
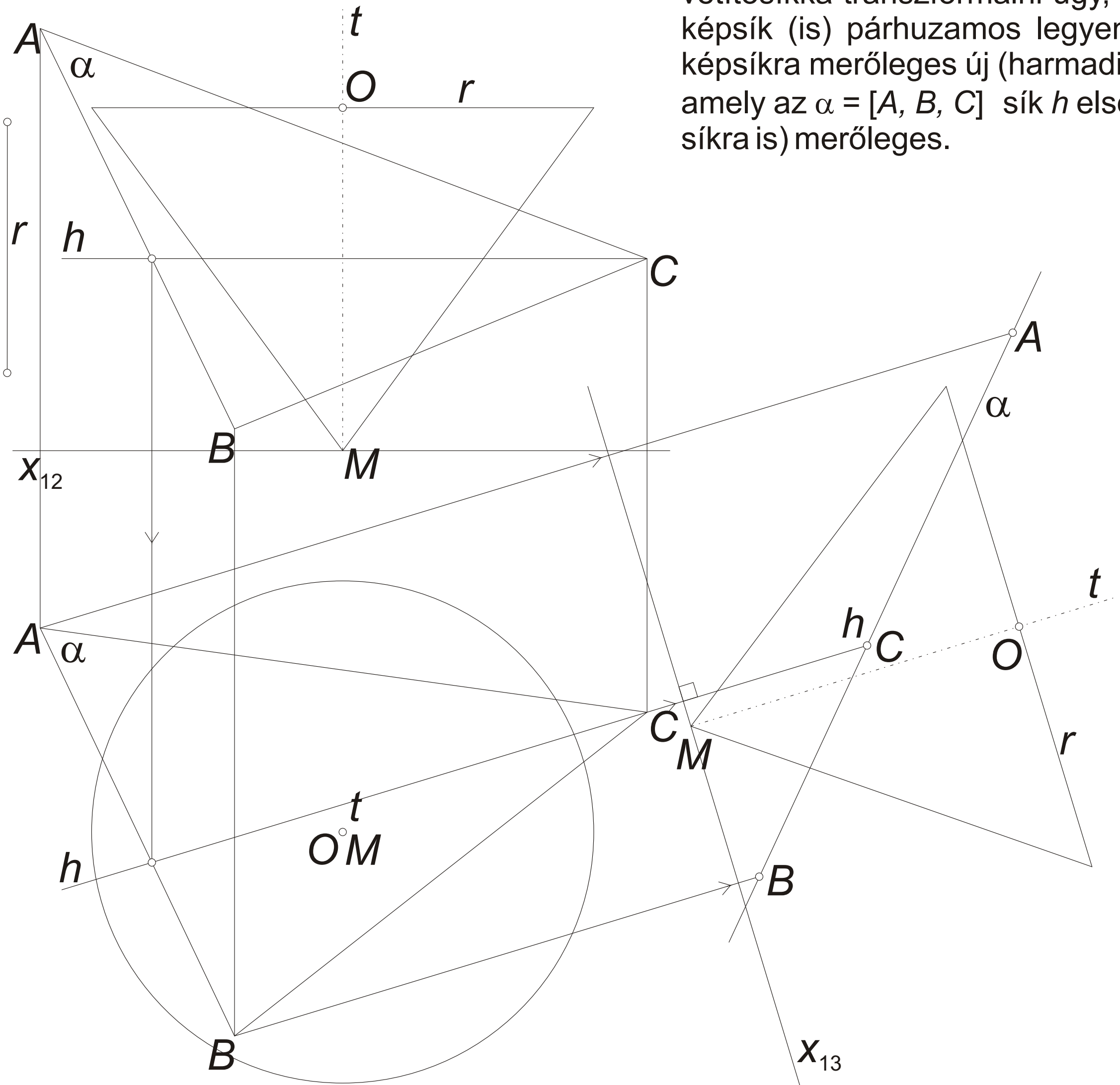
FORGÁSFELÜLET SÍKMETSZETE

Forgáskúp és általános síkra illeszkedő háromszöglemez metszete

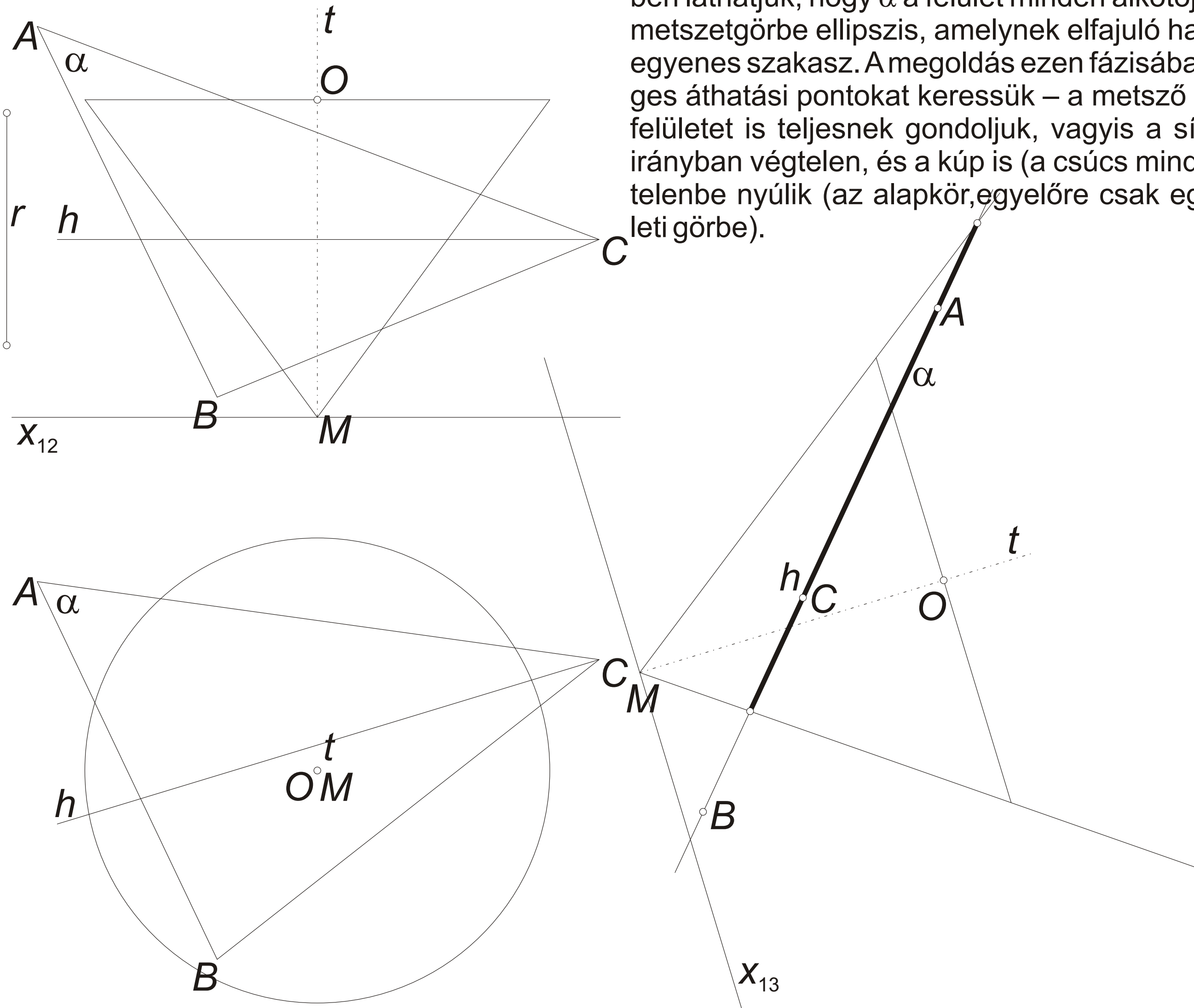
Adott egy forgáskúp, amelynek $t = MO$ tengelye első vetítőegyenes, csúcsa M, alapkörének középpontja O, alapkörének sugara pedig r. Adott továbbá az ABC háromszöglemez. Szerkesszük meg a felület és a síklemez metszetét. A láthatóság feltüntetésekor tegyük föl, hogy a kúp lemezből van és alaplapját eltávolítottuk. Az átlátszatlan lemez a helyén marad.



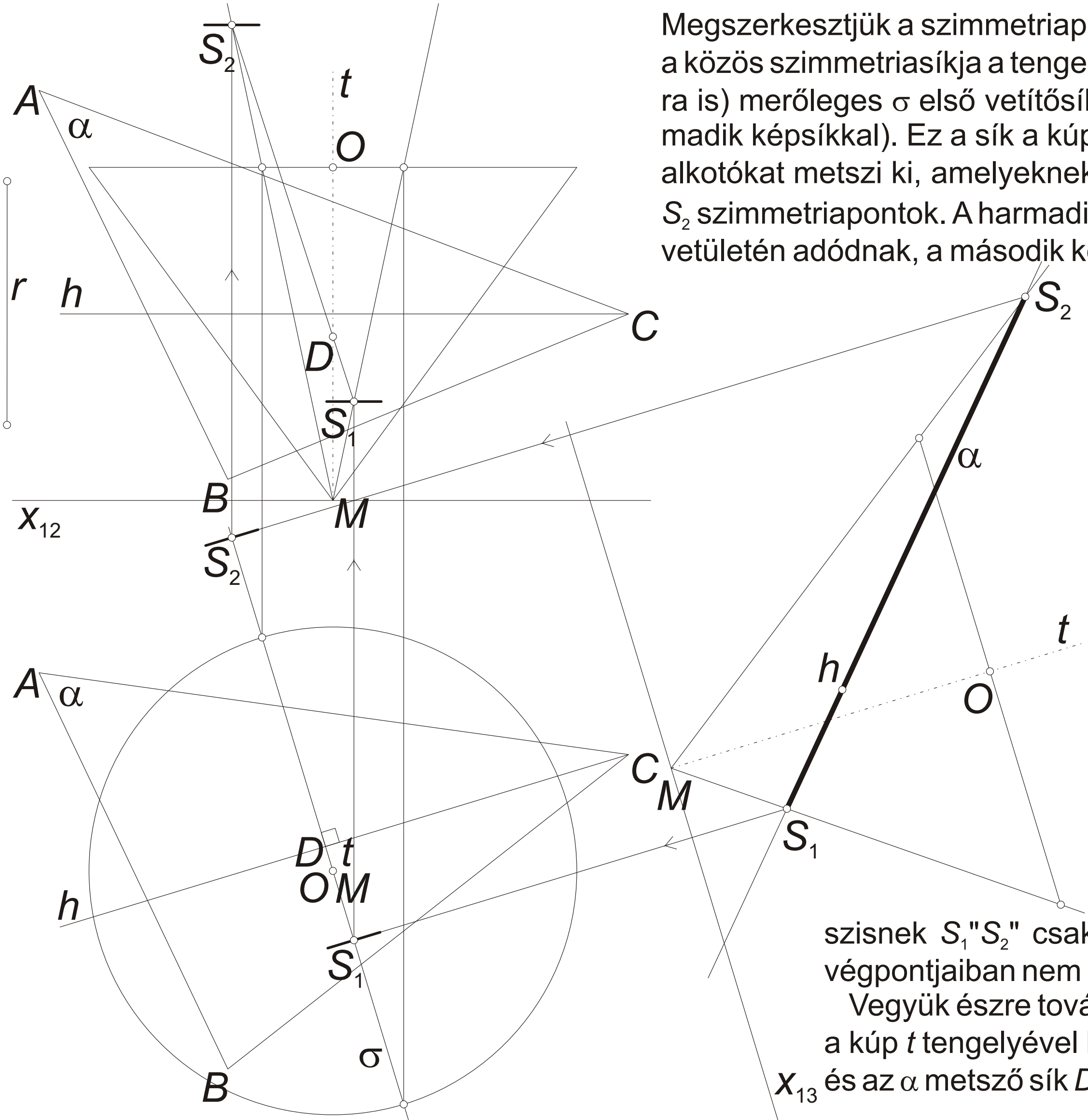
Kúp síkmetszetének szerkesztésekor célszerű a metsző síkot vetítősíkká transzformálni úgy, hogy a kúp tengelyével az új képsík (is) párhuzamos legyen. Esetünkben tehát az első képsíkra merőleges új (harmadik) képsíkot célszerű fölvenni, amely az $\alpha = [A, B, C]$ sík *h* első fővonalára (és így a metsző síkra is) merőleges.



Így azonnal leolvashatjuk a metszetgörbe típusát. Esetünkben láthatjuk, hogy α a felület minden alkotóját metszi, tehát a metszetgörbe ellipszis, amelynek elfajuló harmadik képe egy egyenes szakasz. A megoldás ezen fázisában – amíg a lényeges áthatási pontokat keressük – a metsző síkot is és a kúpfelületet is teljesnek gondoljuk, vagyis a sík minden síkbeli irányban végtelen, és a kúp is (a csúcs mindkét oldalán) végtelenbe nyúlik (az alapkör,egyelőre csak egy egyszerű felületi görbe).



Megszerkesztjük a szimmetriapontokat. A felületnek és α-nak a közös szimmetriasíkja a tengelyen átfektetett, *h*-ra (és így α-ra is) merőleges σ első vetítősík (σ tehát párhuzamos a harmadik képsíkkal). Ez a sík a kúpfelületből a harmadik kontúralkotókat metszi ki, amelyeknek α-val közös pontjai az S_1 és S_2 szimmetriapontok. A harmadik kép alapján az első képek σ vetületén adódnak, a második képek pedig transzformációval szerkeszthetők (és persze illeszkednek a σ-ban lévő alkotókra is).

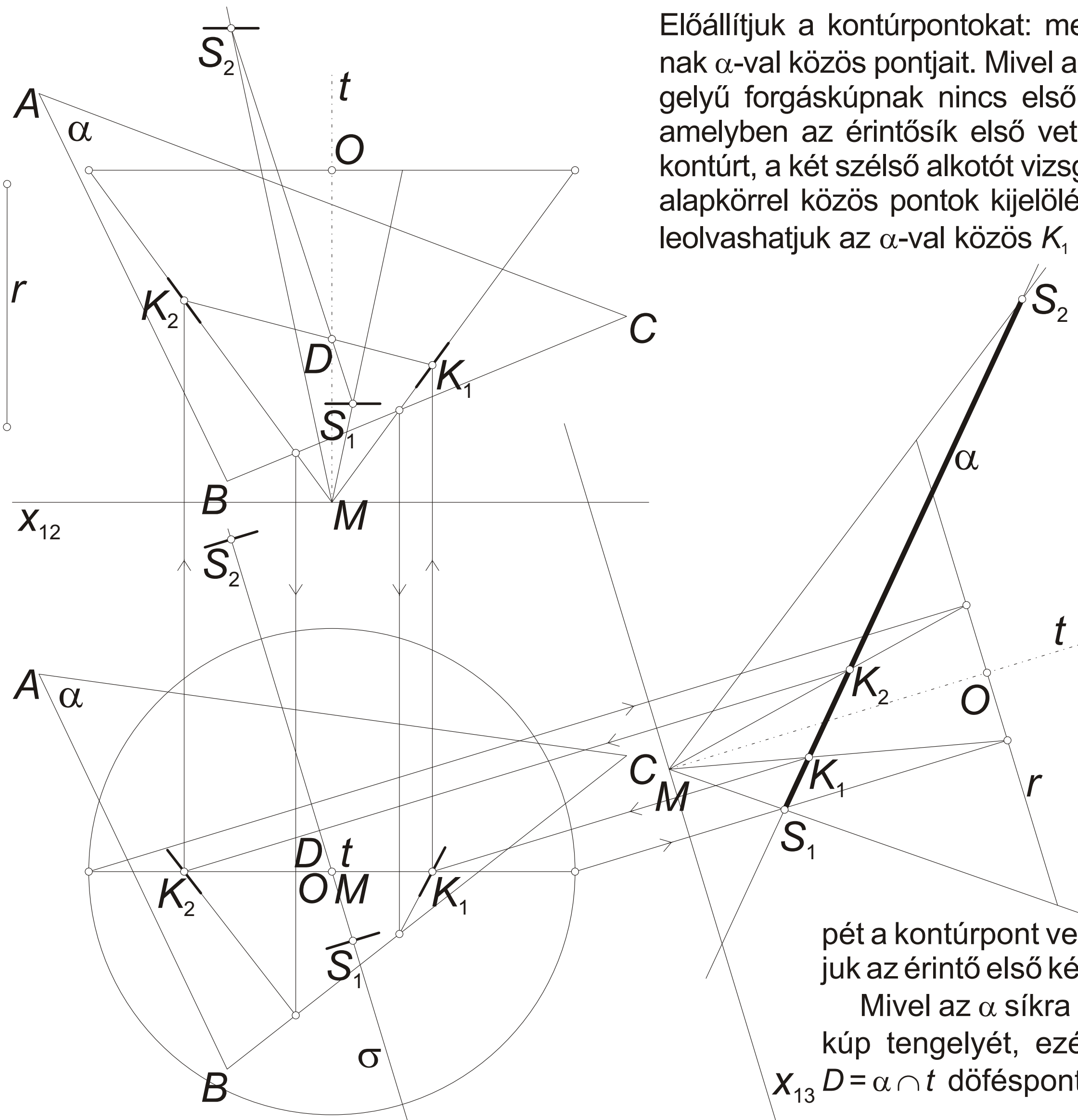


A metszetgörbe ezen pontokhoz tartozó érintői σ-ra való tükrözésnél önmagukra képeződnek, így σ-ra merőleges első fővonalak lesznek α-ban.

Az α sík első esésvonalára illeszkedő S_1S_2 szakasz a metszetellipszis egyik szimmetriatengelye, mégpedig (mint belátható) éppen a nagytengelye.

Az első képen $S_1'S_2'$ a képellipszis nagytengelyét adja, viszont a második képellipszisnek $S_1''S_2''$ csak egy egyszerű átmérője (ui. végpontjaiban nem merőlegesek rá az érintők).

Vegyük észre továbbá, hogy az S_1S_2 átmérőnek a kúp *t* tengelyével közös pontja éppen a tengely és az α metsző sík *D* döféspontja.

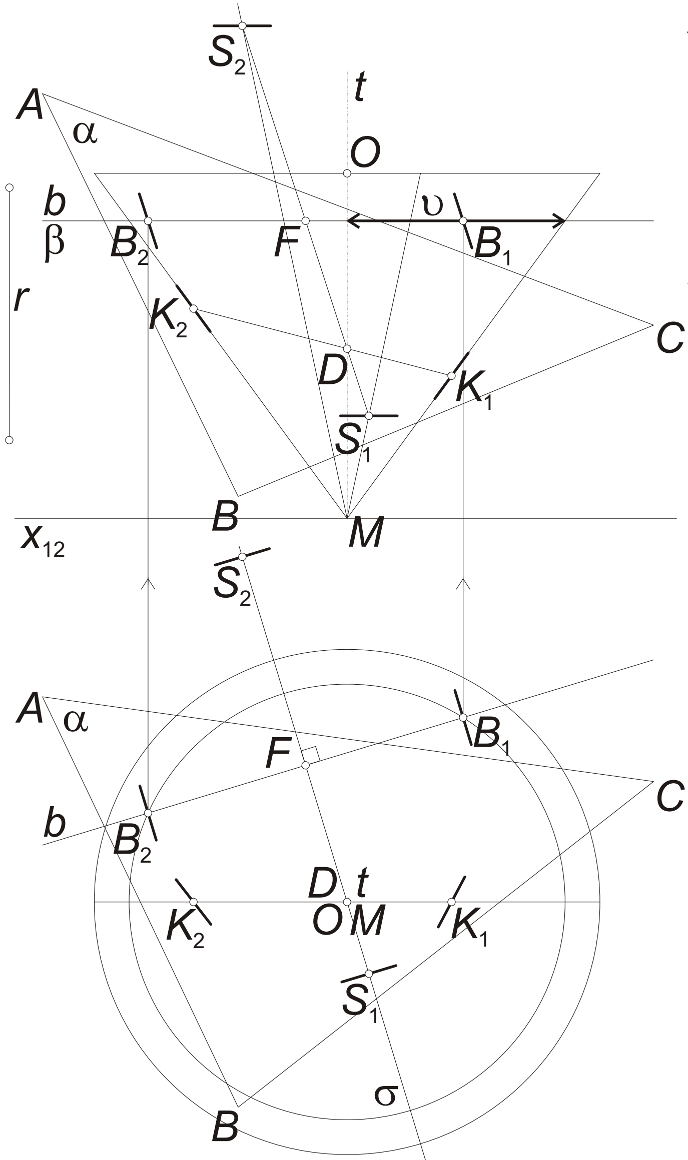


Előállítjuk a kontúrpontokat: megkeressük, a felület kontúrjának α-val közös pontjait. Mivel az első képsíkra merőleges tengelyű forgáskúpnak nincs első kontúrja (nincs olyan pontja, amelyben az érintősík első vetítősík lenne), csak a második kontúrt, a két szélső alkotót vizsgáljuk. Ezek harmadik képét az alapkörrel közös pontok kijelölésével kaphatjuk, és ott rögtön leolvashatjuk az α-val közös K_1 és K_2 második kontúrpontokat.

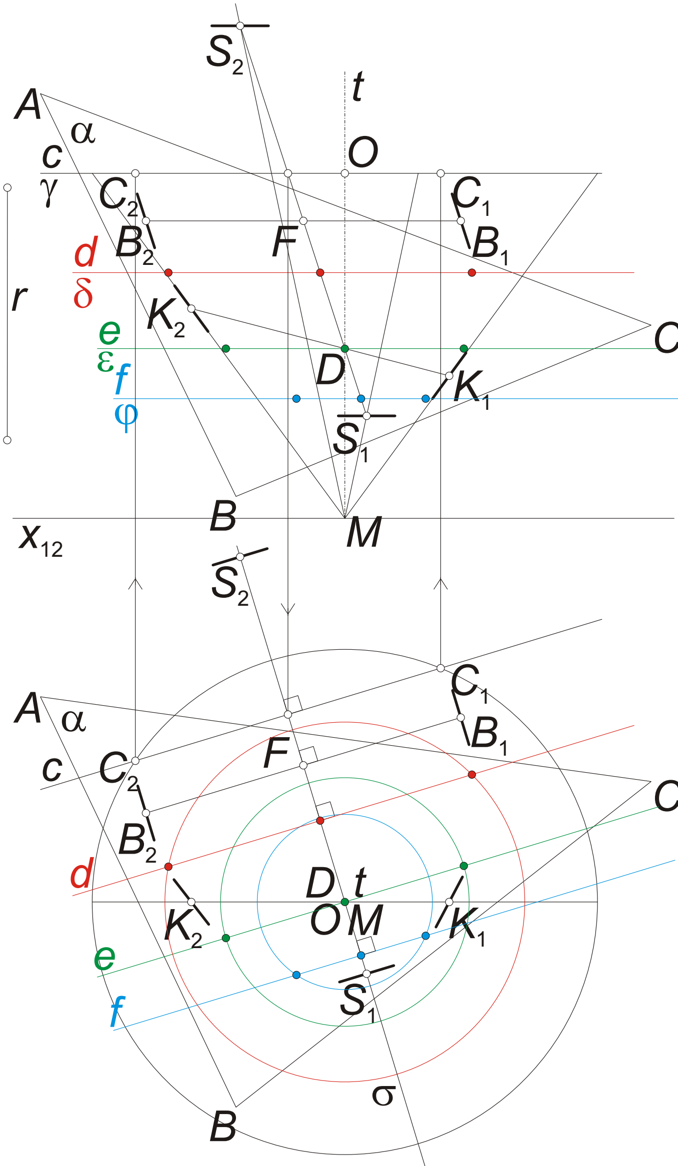
A transzformációt visszafelé alkalmazva, a szélső alkotók vetületén adódik a pontok első és második képe.

A metszet ezen pontokhoz tartozó érintőinek második képe közvetlenül adódik, hiszen egy második kontúrponthoz tartozó érintő második képe érinti a második képkörrajzot, esetünkben a szélső alkotó vetületét. Mivel ez egyenes, ő maga lesz az érintő második képe is. Az első kép pedig abból adódik, hogy az érintő α-ra is illeszkedik. Például megkeressük az érintő BC egyenessel közös pontját. Ennek első képét a kontúrpont vetületével összekötve megkapjuk az érintő első képét.

Mivel az α síkra illeszkedő K_1K_2 húr is metszi a kúp tengelyét, ezért neki is át kell haladnia a $D = \alpha \cap t$ döféspontonon.

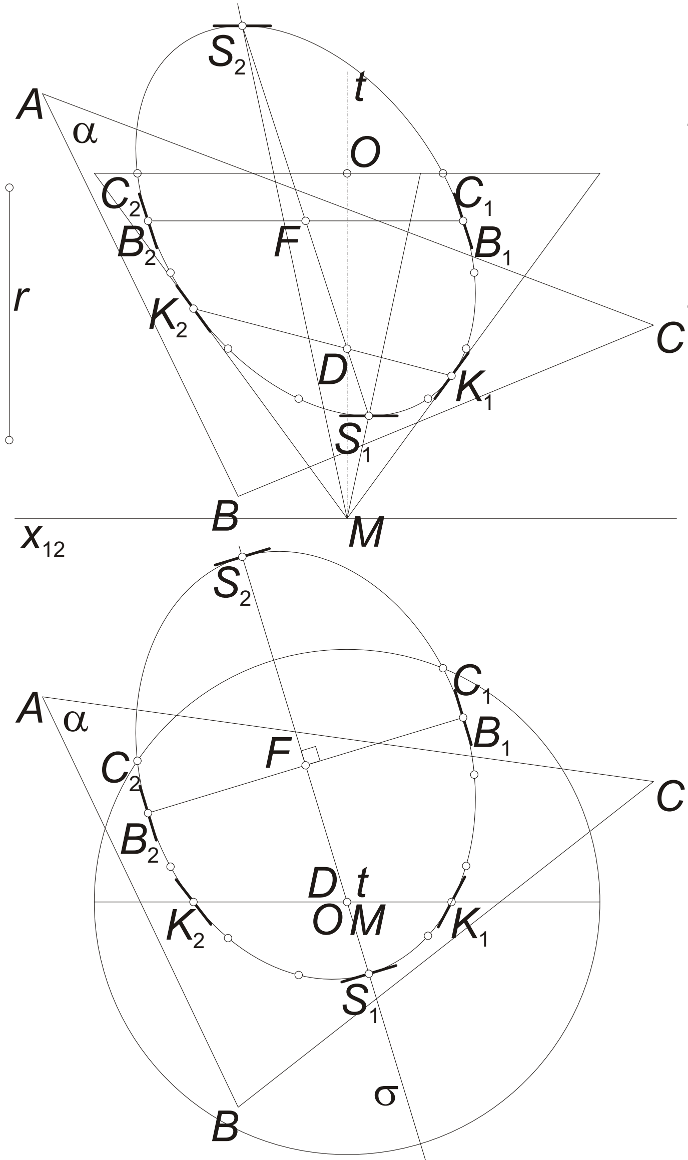


A metszetellipszis kistengelyének előállításához először kijelöljük az ellipszis F középpontját az S_1S_2 nagytengely felezőpontjaként. A kúp tengelyére merőleges, F-en áthaladó β sík metszi ki α-ból a kistengely b egyenesét, amely így α-nak (az S_1S_2 első esésvonalára merőleges) első fővonala. Ugyanez a sík a kúp felületéből egy parallelkört metsz ki, amelynek υ sugarát a második képen a t tengely és a szélső alkotó között olvashatjuk le (valódi méretű első képe koncentrikus az alapkör képével). A parallelkör tehát a kúpfelületre, b pedig az α síkra illeszkedik, és mindketten rajta vannak β-n. Így az első képen leolvasható B_1 és B_2 (valódi) metszéspontok a kúpfelület és az α sík β-ra illeszkedő közös pontjai lesznek. Ezek a kistengely keresett végpontjai. Az érintőket az S_1S_2 nagytengellyel párhuzamosan rajzolhatjuk meg.



Az alapkörön lévő C_1 és C_2 metszéspontok előállításához a kistengelyvégpontok szerkesztésénél látott módszert alkalmazhatjuk. Az alapkör t tengelyre merőleges γ síkjával szeletelünk, amely a c első fővonalban metszi α-t. Ennek az alapkörrel közös pontjai a keresett metszéspontok.

Hasonlóan járhatunk el általános metszéspontok szerkesztése során is. A felület t tengelyére merőleges δ, ε, φ, stb. szeletelő síkokat veszünk föl. Ezek az α síkból rendre kimetszik a d, e, f, stb. első fővonalakat, a kúpból pedig egy-egy parallelkört. A parallelkör sugarát mindig leolvashatjuk a második képről a szeletelő sík vetületén a tengely és a szélső alkotó közé eső szakasz hosszaként.



Ha a metszésvonalnak elég sok pontját és érintőjét megszerkesztettük, ezek figyelembe vételével (görbrvonalzó segítségével) megrajzolhatjuk a görbe vetületeit. Az első képellipszis tengelyeit megkaptuk, viszont a második képellipszis tengelyei nem adódtak még az eddigi lépésekben. Szükség esetén például a Rytz-szerkesztés alkalmazásával állíthatjukelő ezeket. Ehhez vegyük figyelembe, hogy S_1S_2 és B_1B_2 a térbeli ellipszis tengelyeiként konjukált átmérőpárt alkotnak, így vetületük is konjugált átmérőpárját adja a képellipszisnek.

Végül a megadott feltételeknek megfelelően feltüntetjük a láthatóságot. Ügyeljünk rá, hogy a metszetgörbe láthatósága a második képen a K_1 és K_2 kontúrpontokban változik.