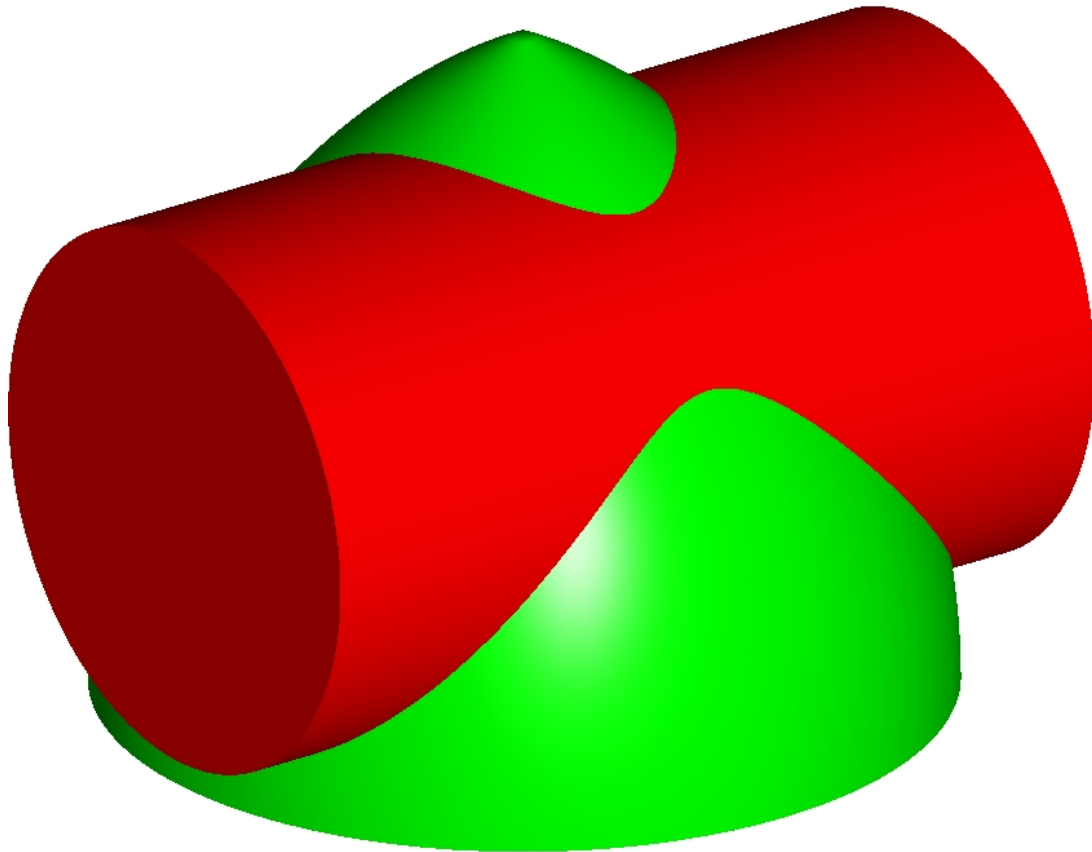
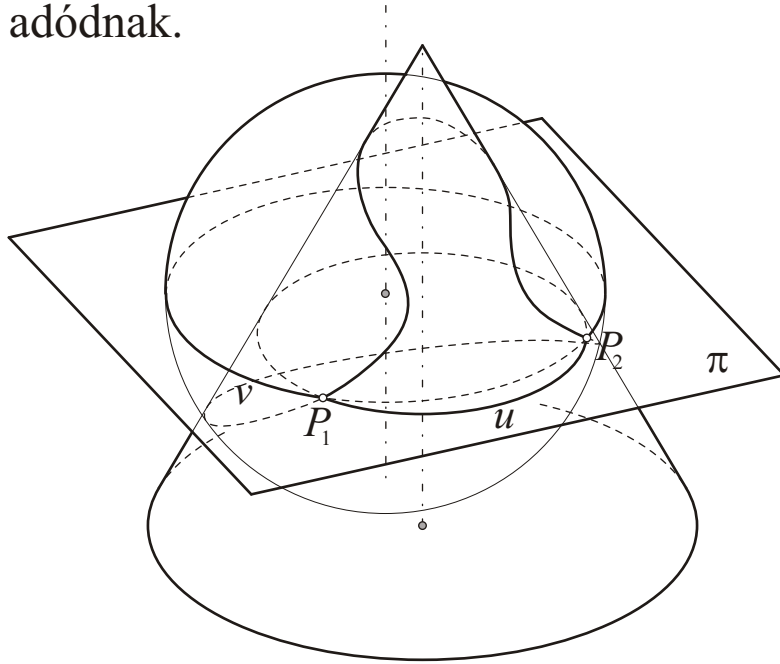


FORGÁSFELÜLETEK ÁTHATÁSA



Az áthatási görbe szerkeszthetősége pontonkénti szerkeszthetőséget jelent. Általában szeletelősíkokat (vagy gömböket) alkalmazunk arra törekedve, hogy a szeleteléssel mindkét felületből vagy egyenest, vagy kört messünk ki. Ezek metszéspontjait előállítva a két felületnek a szeletelősíkon lévő áthatási pontjai adódnak.

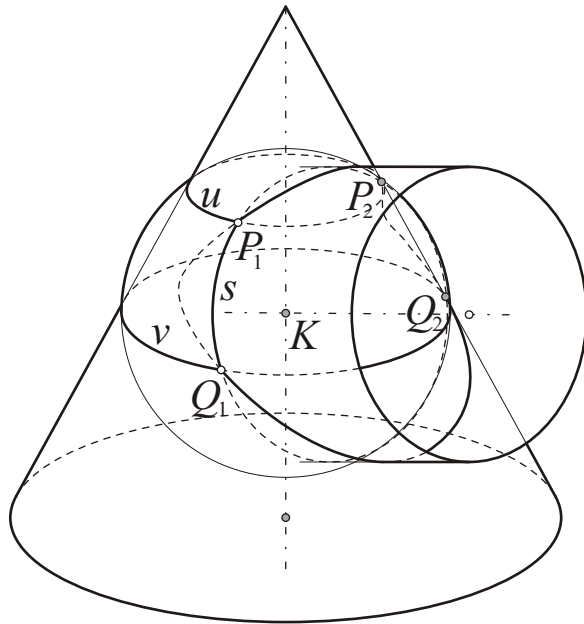


Például, *ha a két forgásfelület tengelye párhuzamos*, akkor a tengelyek közös irányára merőleges szeletelősíkok mindkét felületből paralelkört metszenek ki, amelyek metszéspontjai a szeletelő síkra illeszkedő áthatási pontok lesznek.

Az ábrán egy forgáskúp és egy gömb áthatásának szerkesztését láthatjuk. A gömbnek bármely olyan egyenes forgástengelye, amely áthalad a középpontján, így a kúp tengelyével párhuzamos tengelyt is választhatunk.

A kúp tengelyére merőleges π szeletelősík a kúp felületéből az u , a gömbből pedig a v paralelkört metszi ki, amelyeknek P_1 és P_2 metszéspontjai a két felület π -re illeszkedő áthatási pontjai. Ez a szeletelés tetszőlegesen sok π -vel párhuzamos síkkal megismételhető, és így az áthatási görbe tetszőlegesen sok pontja előállítható.

Ha a két forgásfelület tengelye metszi egymást, akkor a metszéspont köré írt gömbfelületekkel szeletelve kaphatunk áthatási pontokat. Egy ilyen gömbnek ugyanis mindkét eredeti felület tengelye egy-egy forgástengelyét alkotja. Közös tengelyű forgásfelületek áthatása pedig parallelkörökből áll, amelyeket a (közös síkban lévő) meridiánok közös pontjai írnak le. Így egy szeletelő gömb mindkét eredeti felületből gömbi köröket metsz ki, amelyeknek közös pontjai a két felületnek a gömbön lévő áthatási pontjai lesznek.

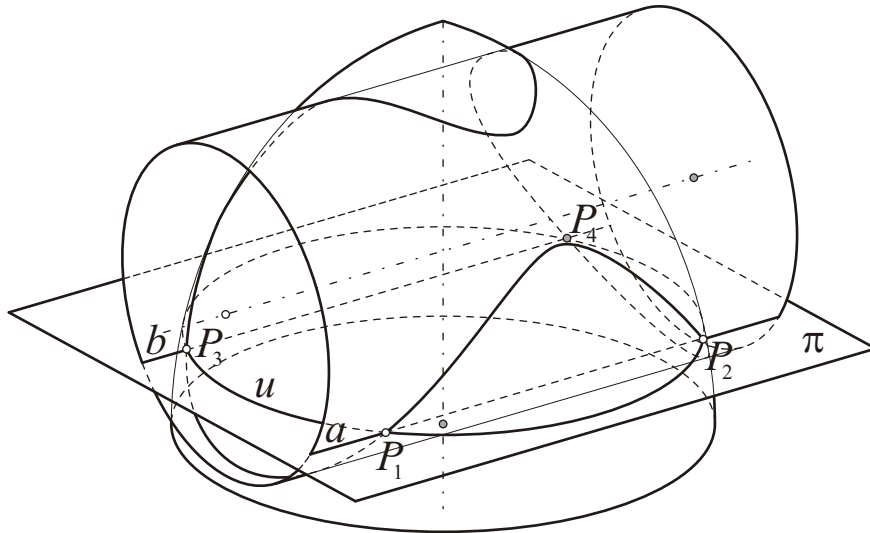


Az ábrán látható forgáskúp és forgáshenger tengelyei a K pontban metszik egymást. A K középpontú gömb a kúpól az u és v parallelköröket metszi ki, a henger adott darabjából pedig az s kört. Ezek mindannyian illeszkednek a gömb felületére. Közös pontjaik – az u körön P_1 és P_2 , a v körön pedig Q_1 és Q_2 – a kúp- és a hengerfelületnek a szeletelő gömbön lévő áthatási pontjai.

Az eljárást tetszőlegesen sok, az előbbivel koncentrikus szeletelő gömbbel megismételve az áthatási görbe további pontjait kaphatjuk.

Kitérő tengelyű forgásfelületek esetében nincs általános eljárás az áthatási pontok szerkesztésére. Vannak azonban jól kezelhető speciális esetek. Például, ha az egyik felület egy forgáshenger, amelynek tengelye merőleges a másik forgástest tengelyére, akkor a második test tengelyére merőleges szeletelősíkok abból mindig paralelköröket, a hengerből pedig alkotókat, tehát egyeneseket metszenek ki. Kitérő tengelyű forgáshengerek esetében pedig a két tengellyel egyidejűleg párhuzamos (a tengelyek normál-transzverzálisára merőleges) szeletelősíkok alkalmazhatók.

Az ábrán egy vízszintes tengelyű forgáshenger és egy függőleges tengelyű forgástestet metszetét láthatjuk. (A forgástestet egy körív megforgatásából származtattuk, amelynek középpontja nem illeszkedik a tengelyre.)



A test tengelyére merőleges π szeletelősík a test felületéből az u paralelkört metszi ki, a hengerből pedig az a és b alkotókat. A közös pontok az a alkotón P_1 és P_2 , a b -n pedig P_3 és P_4 . Ezek a pontok a két felület π -re illeszkedő áthatási pontjai. π -vel párhuzamos további szeletelősíkok alkalmazásával az áthatási görbe tetszőlegesen sok további pontja is előállítható.

Az áthatás szerkesztése során először az úgynevezett **lényeges pontokat** keressük.

Mindenek előtt a **szimmetriapontok** előállítására törekszünk. Így nevezzük a két felület közös szimmetriasíkjaira illeszkedő áthatási pontokat. Szerkesztésük általában úgy történik, hogy magát a szimmetriasíkot választjuk szeletelősíknak. Ilyen pontokban (ha rajtuk csak egyszer halad át a görbe) az érintő merőleges a szimmetriasíkra, hiszen a tükrözésnél ennek is önmagára kell képeződni. Ha pedig a görbe önmagát átmetszve kétszer halad át rajta (úgynevezett duplapont), akkor a két ág egymásra képeződik a tükrözésnél, és ugyanez történik az ágak érintőivel is. Ilyen eset akkor fordulhat elő, ha a pontban a két felület érintősíkja egybeesik.

Az ábrázolás szempontjából további lényeges pontok a **kontúrpontok**. Ezek az egyes felületek kontúrgörbéinek a másik felülettel közös pontjai. Kétképsíkos ábrázolás esetén például sorra kell venni mindkét felület mindkét kontúrját, így általában négy részfeladatot kell megoldani. Bizonyos esetekben nem tudjuk (esetleg elvileg sem) megszerkeszteni ezeket. Ilyenkor a görbe másik képének közelítő megrajzolása után olvashatjuk le a kontúrral közös pontokat. Az érintő vetületének megrajzolásakor pedig kihasználjuk, hogy az érinti a képkörrajzot.

Forgásfelületek esetében **egyéb lényeges pontok** lehetnek a lezáró és csatlakozó (különböző típusú felületrészek közös határát képező) parallelkörökön lévő áthatási pontok is.

Végül néhány fontos elméleti összefüggést tekintünk át. A gömb, a forgáshenger és a forgáskúp is (speciális) *másodrendű felületek*, ami azt jelenti, hogy másodfokú egyenlettel írhatók le. Az x, y, z térbeli derékszögű koordinátarendszerben például az origó középpontú r sugarú gömb egyenlete $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, a z tengelyű r sugarú forgáshengeré $x^2 + y^2 = r^2$, a z tengelyű origó csúcsú φ nyílásszögű forgáskúpé pedig $x^2 + y^2 = z^2 \cdot \text{ctg}^2(\varphi/2)$. Ennek geometriai jelentése az, hogy egy egyenessel legfeljebb 2 metszéspontjuk lehet.

Hasonlóan az n -edfokú egyenlettel leírható felületeket n -edrendűnek mondjuk. Belátható, hogy *egy n -edrendű és egy m -edrendű felület áthatási görbéje $n \cdot m$ -edrendű térgörbe*, így két másodrendű felület áthatása negyedrendű görbe. Geometriai szempontból ez azt jelenti, hogy egy ilyen görbének egy síkkal, legfeljebb 4 közös pontja lehet. Mivel ez a vetítősíkokra is igaz, a negyedrendű görbe vetülete is legfeljebb negyedrendű síkgörbe, annak egy egyenessel szintén csak legfeljebb 4 közös pontja lehet. Ez egy fontos támpont lesz a vetületi görbék megrajzolása során.

Ebből a szempontból további alapvető tudnivaló, hogy *amennyiben egy fősíkra vonatkozó szimmetria következtében egy $2n$ -edrendű görbe vetülete kettős vetület*, vagyis a vetület minden pontja a térbeli görbe két pontjának a képe, *akkor a vetületi görbe egy n -edrendű síkgörbére illeszkedik*. Negyedrendű görbe kettős-vetülete tehát másodrendű görbére, vagyis kúpszeletre (ellipszisre, parabolára, hiperbolára, ...) illeszkedik.