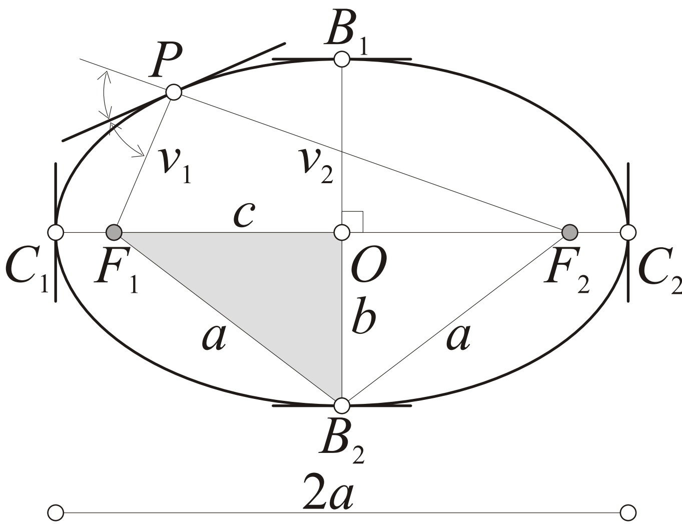
ELLIPSZIS, HIPERBOLA, ÉS PARABOLA

1. Az ellipszis



$$b^2 + c^2 = a^2$$

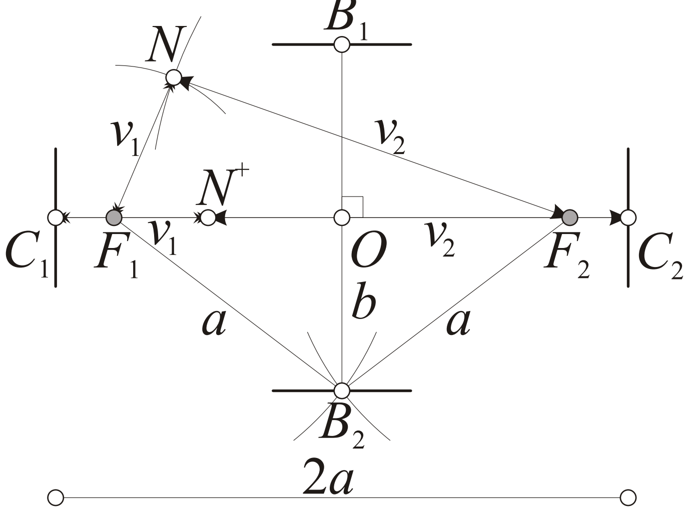
Adottak a síkon az F_1 és az F_2 pontok (***fókuszok***) valamint a $2a$ távolság úgy, hogy $2c = |F_1F_2| < 2a$ teljesüljön. ***Ellipszisnek*** nevezzük a sík azon P pontjainak halmazát, amelyekre fennáll a $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ egyenlőség (a $v_1 = PF_1$ és $v_2 = PF_2$ szakaszok a P pont ***vezérsugarai***).

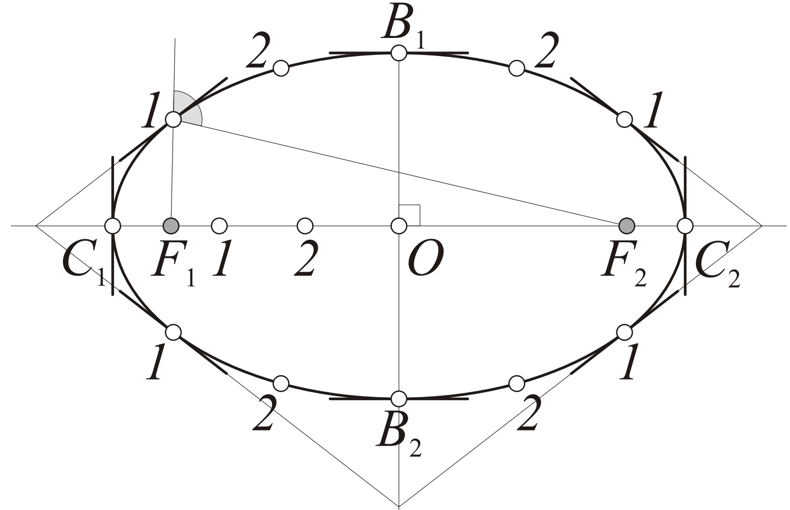
Szimmetriák: az F_1F_2 egyenesre (a ***nagytengely*** egyenesére) és az F_1F_2 szakasz felező merőlegesére (a ***kistengely*** egyenesére) vonatkozó ***tengelyes szimmetriák,*** és e két egyenes O metszéspontjára (a ***középpontra***) vonatkozó ***centrális szimmetria.***

A szimmetriatengelyekre illeszkedő pontok a C_1 és C_2 ***csúcspontok*** vagy ***nagytengely végpontok*** ($|OC_1| = |OC_2| = a$), továbbá a B_1 és B_2 ***kistengely végpontok*** ($|OB_1| = |OB_2| = b$, $|F_1B_i| = |F_2B_i| = a$, $i = 1, 2$). A tengelyvégpontokhoz tartozó érintő merőleges a tengely egyenesére.

Állítás: Az ellipszis egy P pontjához tartozó érintője felezi a ponthoz tartozó v_1 és v_2 vezérsugarak külső szögét.

Ellipszispontok és érintők szerkesztése

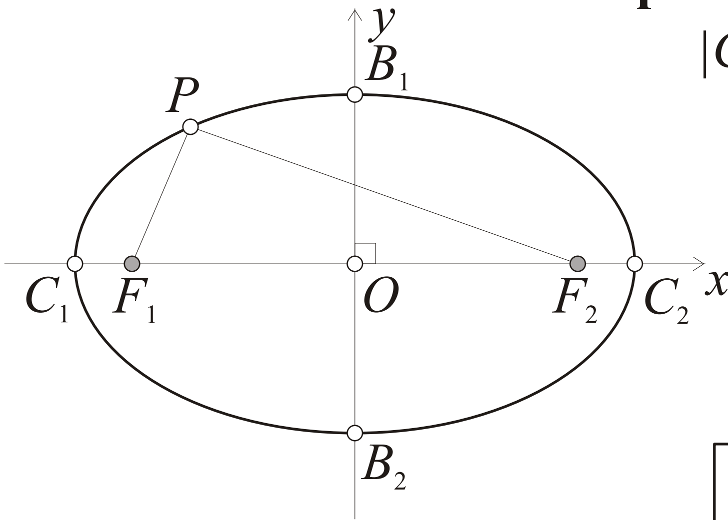




Legyenek adottak az ellipszis F_1 és F_2 fókuszai, valamint a $2a > |F_1F_2|$ távolság.

- Az F_1F_2 egyenesen O-tól a távolságra kijelöljük a C_1 és C_2 csúcspontokat.
- Az F_1F_2 szakasz felező merőlegesén a fókuszoktól a távolságra adódnak a kistengely B_1 és B_2 végpontjai.
- Ha a $2a$ hosszúságú C_1C_2 szakaszt egy F_1 és O közé eső N^+ ponttal két részre osztjuk, akkor a létrejövő, rendre v_1 és v_2 hosszúságú N^+C_1 és N^+C_2 szakaszok ($v_1 + v_2 = 2a$ miatt) egy, az ellipszisre illeszkedő (megfelelő) N pont vezérsugarai.
- N^+-hez hasonlóan további osztópontok is felvehetők F_1-től O felé haladva növekvő közökkel. Mindegyikhez megszerkeszthetjük a megfelelő ellipszispontokat, amelyek a szimmetriák miatt négyesével adódnak. A szimmetriákat az érintők szerkesztése során is kihasználhatjuk.

Az ellipszis egyenlete



$$|C_1C_2| = 2a; \quad |F_1F_2| = 2c; \quad b^2 = a^2 - c^2$$

$$F_1(-c,\ 0); \quad F_2(c,\ 0); \quad P(x,\ y)$$

$$|F_1P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$|F_2P| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$F_1P + F_2P = 2a$$

$$\boxed{\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x^2 + 2xc + c^2) + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x^2 - 2xc + c^2) + y^2$$

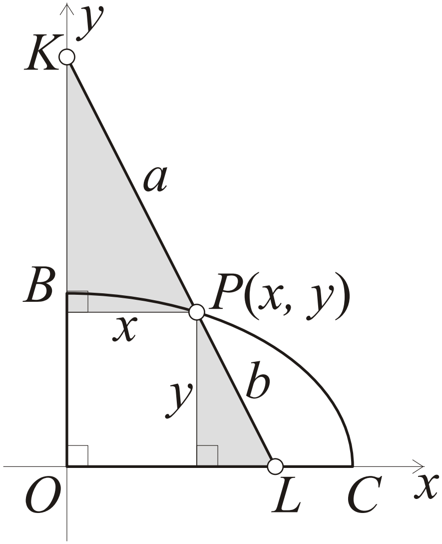
$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc$$

$$a^2(x^2 - 2xc + c^2) + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ illetve } K(u,\ v) \text{ középponttal: } \frac{(x-u)^2}{a^2} + \frac{(y-v)^2}{b^2} = 1}$$

Az ellipszográf elve, papírcsík szerkesztés



Az $a+b$ hosszúságú KL egyenes szakasz úgy mozog a koordinátarendszerben, hogy mozgása közben K és L végpontjai rendre az x ill. y tengelyen maradnak. Vizsgáljuk, milyen pályán mozog eközben a szakaszt a és b hosszúságú darabokra osztó P pont.

A megjelölt hasonló derékszögű háromszögekből:

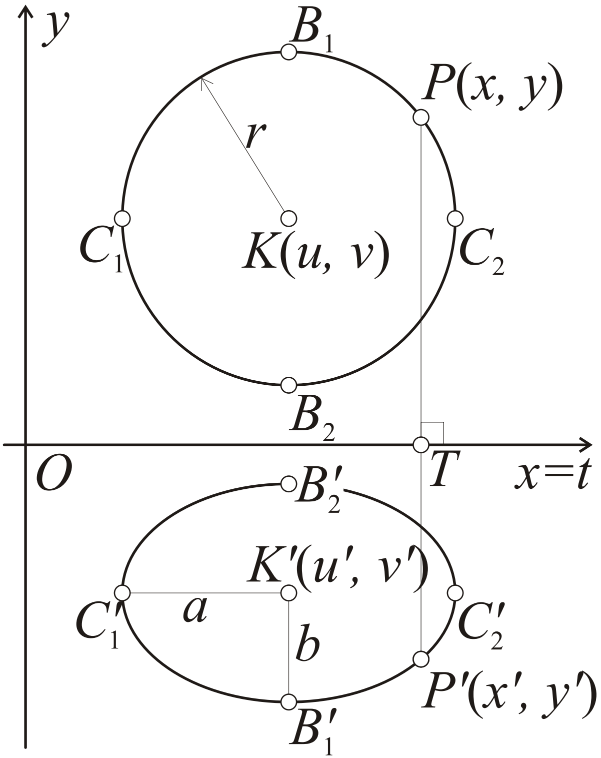
$$\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b}\text{, majd négyzetre emelve: } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Láthatjuk tehát, hogy a P pont egy origó középpontú a, b féltengelyű ellipszis pályán mozog ($a = |OC|$, $b = |OB|$). Ez az ***ellipszográf elve*** (ill. az ún. ***papírcsík szerkesztés***).

Feladat: Adott egy ellipszis C_1C_2 nagytengelye és azon kívül egy P pontja. Állítsuk elő a B_1B_2 kistengelyt.

Megoldás a *papírcsík szerkesztés megfordítása* alapján: B_1B_2 egyenese a C_1C_2 szakasz felező merőlegese. P köré körívet rajzolunk $a = |C_1C_2|/2$ sugárral. Ez a kör a B_1B_2 egyenesből (P oldalán) kimetszi a K pontot, a KP egyenes pedig C_1C_2-ből az L pontot. A fél kistengely hossza a PL távolság: $b = |B_1B_2|/2 = PL$. Ezt kell felmérni a középponttól (a tengelyek metszéspontjától) B_1 és B_2 kijelöléséhez.

A kör affin képe ellipszis



Adott a t tengelyű λ arányú merőleges affinitás, és a K középpontú r sugarú ***kör.*** Keressük a kör képét.

Koordinátarendszert rögzítünk a síkon úgy, hogy annak x tengelye egybeessen t-vel. Tekintjük a kör egy P pontját. Ennek koordinátáira az alábbi egyenlet teljesül:

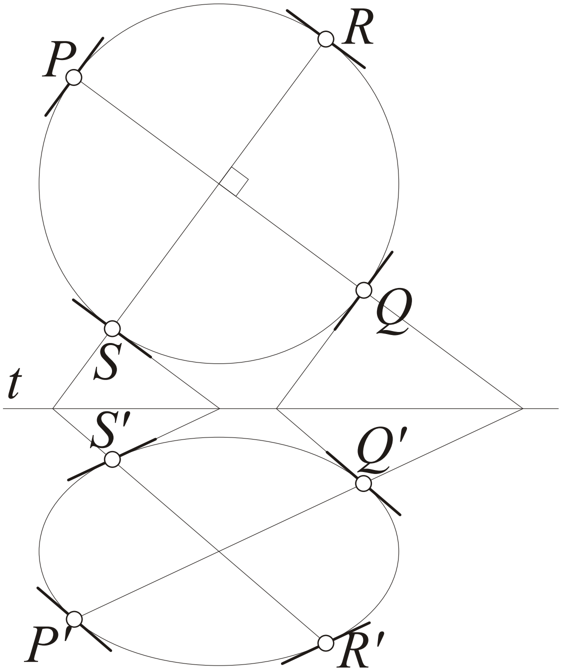
$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2$$

Az affinitás definíciója szerint $|P'T| = \lambda|PT|$, így P' koordinátái az $x' = x$ és $y' = \lambda y$ kifejezésekkel adódnak. Fordítva, P koordinátái is kifejezhetők P'-éből: $x = x'$, $y = y'/\lambda$. Ezt a kör egyenletébe helyettesítve:

$$(x'-u)^2 + (y'/\lambda - v)^2 = r^2, \text{ amiből az } \frac{(x'-u)^2}{r^2} + \frac{(y'-\lambda v)^2}{(\lambda r)^2} = 1$$

egyenlet adódik. Ez pedig a K' középpontú ($u' = u$, $v' = \lambda v$) ***ellipszis*** egyenlete, amelynek x-szel párhuzamos féltengelye ($|\lambda| < 1$ esetén fél nagytengelye) $a = r$, míg y tengellyel párhuzamos féltengelye (fél kistengelye) $b = |\lambda| r$.

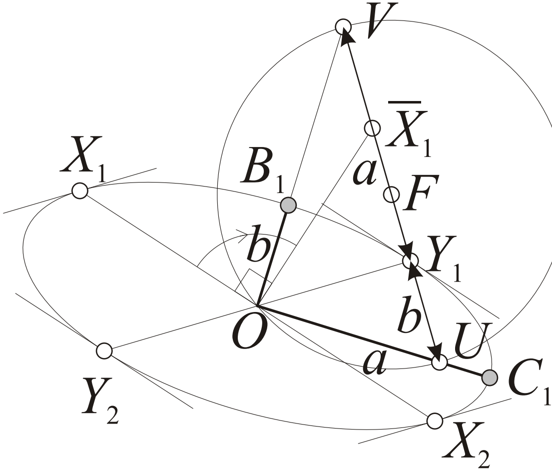
Konjugált átmérőpár



Az ellipszis (spec. a kör) két átmérőjét ***konjugált átmérőpárnak*** nevezzük, ha az egyik átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak a másik átmérővel, és a második átmérő végpontjaihoz tartozó érintők párhuzamosak az első átmérővel.

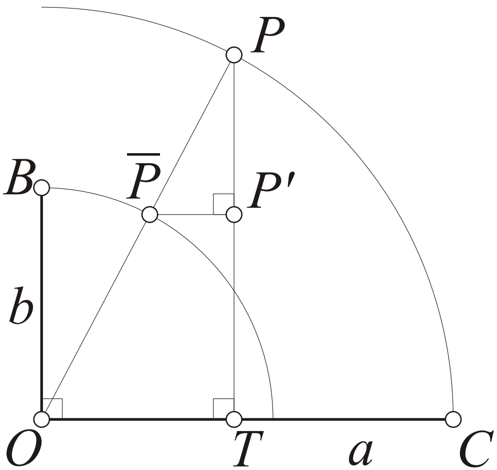
A kör konjugált átmérőpárjai a merőleges átmérőpárok.

A párhuzamosságtartás miatt a kör (vagy egy ellipszis) konjugált átmérőpárjának affin képe a képellipszis egy konjugált átmérőpárja.



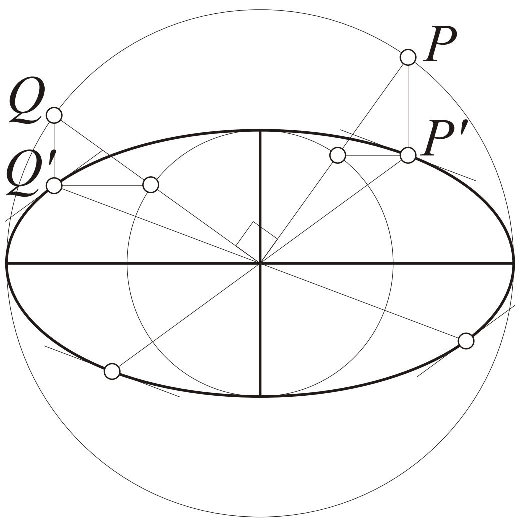
Rytz-szerkesztés. Adott egy ellipszis X_1X_2, Y_1Y_2 konjugált átmérőpárja. Keressük a C_1C_2, B_1B_2 tengelyeit. Az OX_1 átmérőt O körül 90°-kal elforgatva $O\overline{X}_1$ adódik. Az $\overline{X}_1Y_1$ szakasz F felezőpontja körül O-n áthaladó kört rajzolunk, amely az $\overline{X}_1Y_1$ egyenest az U és V pontokban metszi (U az X_1X_2, Y_1Y_2 átmérők hegyesszögű tartományába esik). Ekkor OU a nagytengely egyenese, és $a = |OC_1| = |VY_1|$; a kistengely egyenese pedig OV, és $b = |OB_1| = |UY_1|$.

Kétkörös szerkesztés



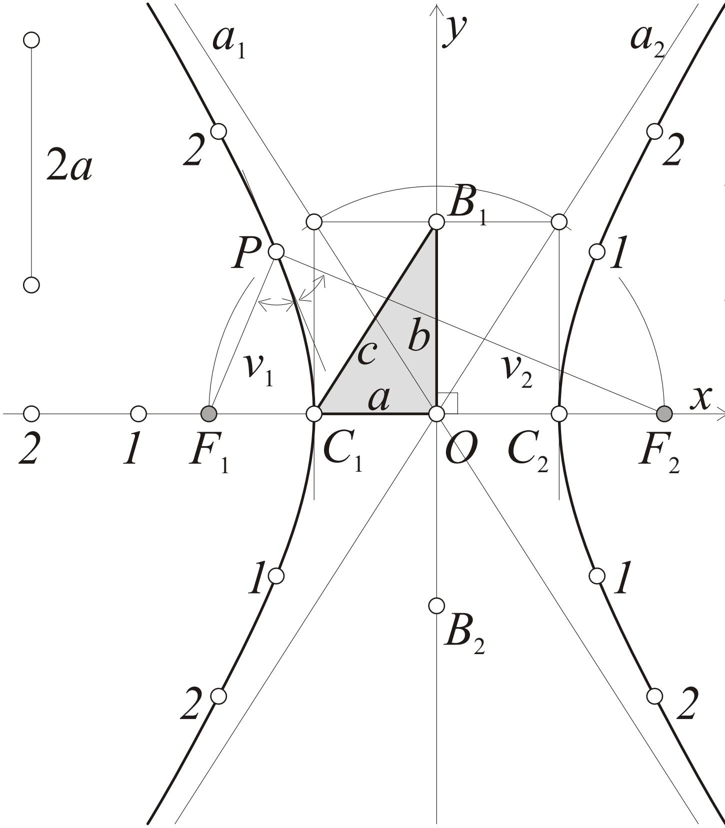
Ha adottak az ellipszis tengelyei, megrajzoljuk a ***főkört*** – a nagytengely Thalész-körét (sugara a) – és a ***mellékkört*** – a kistengely Thalész-körét (sugara b). P a főkör egy tetszőleges pontja. Az OP sugár $\overline{P}$-ban metszi a mellékkört. P-ben merőlegest állítunk az OC nagytengelyre, $\overline{P}$-ban pedig az OB kistengelyre. Ekkor e két egyenes P' metszéspontja illeszkedik az ellipszisre.

Ugyanis OT és $\overline{P}P'$ az OPT szög szárainak párhuzamos szelői, így $|P'T| \,/\, |PT| = |\overline{P}O| \,/\, |PO| = b/a = \lambda$ állandó, vagyis P' a P pont OC tengelyre vonatkozó λ arányú affin képe.



A főkör további pontjaiból kiindulva tetszőlegesen sok ellipszispont megszerkeszthető.

Célszerű a főkör egymásra merőleges (konjugált) OP és OQ átmérőpárjaiból kiindulni. Ekkor a kapott átmérők konjugáltságából egyszerűen adódnak az érintők is.



2. A hiperbola

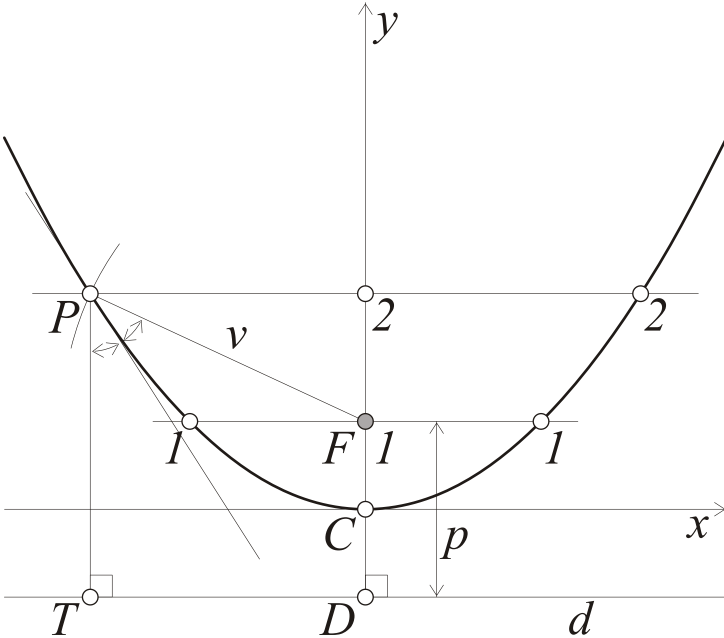
$2a < |F_1F_2|$; $\{P : ||PF_1| - |PF_2|| = 2a\}$.
F_1, F_2: fókuszok, $|F_1F_2| = 2c$ fókusztáv.;
C_1, C_2: csúcsok, $|C_1C_2| = 2a$ valós tengely;
B_1, B_2: képzetes tengely, $|B_1B_2| = 2b$;
C_1C_2, B_1B_2 szimmetriatengelyek;
O szimmetriacentrum, középpont.
$v_1 = PF_1$ és $v_2 = PF_2$ szakaszok P vezérsugarai. P-ben az érintő belülről felezi v_1, és v_2 szögét. Az a_1, a_2 aszimptotáknak a csúcsérintőkkel alkotott metszéspontja illeszkedik az F_1F_2 szakasz Thalész-körére.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$(x^2 / a^2) - (y^2 / b^2) = 1$ a görbe,

$y = \pm bx/a$ az aszimptoták egyenlete.

Hiperbola pontok szerkesztéséhez a valós tengelyen a fókusztól kifelé haladva növekvő közökkel veszünk föl osztópontokat (*1, 2, …*). Az ezekhez tartozó görbepontok vezérsugarainak hossza az osztópont és a csúcspontok távolsága. Például $v_1 = 1C_1$ és $v_2 = 1C_2$; a görbe megfelelő pontjai négyesével adódnak.



3. A parabola

$\{P : |PF| = |Pd|\}$. F a fókusz, d a direktrix, $|Fd| = |FD| = p$ a paraméter.
A C csúcspont felezi az FD szakaszt; FD egyenes a szimmetriatengely, a d-re merőleges egyenesek az átmérők. P-ben az érintő felezi a $v = FP$ vezérsugár és a direktrixre bocsátott PT merőleges szögét.

$$y = x^2 / 2p$$

Parabola pontok szerkesztéséhez a tengelyen a csúcsponttól indulva a tengely irányában haladva növekvő közökkel veszünk föl osztópontokat (*1, 2, …*). Az ezekhez tartozó görbepontok vezérsugarainak hossza D és az osztópont távolsága lesz (pl. $v = D2$). F körül ezzel a sugárral körívezve metszhetjük ki az osztóponton áthaladó d-vel párhuzamos szelő egyeneséből a görbe megfelelő pontjait.